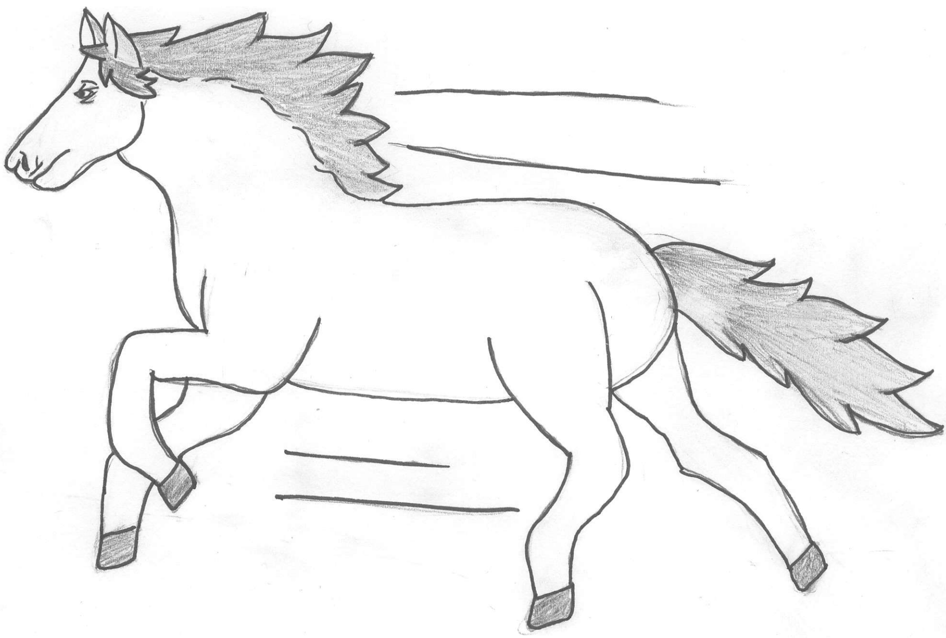
MALYNÁR

Číslo 5 — Ročník 27 malynar.strom.sk



Ahojte!

Na hodinkách máme konečne letný čas a Veľká Noc je za nami, rovnako ako aj prvá séria. No nebojte, nudiť sa nebudete! Sú tu zadania druhej série a s nimi aj vzorové riešenia a poradie tej prvej. Takže majte na pamäti, že je to vaša posledná šanca na získanie nejakých tých bodíkov pred letným sústredením a hor sa riešiť. Prajeme úspešné zdolávanie príkladov.

Vaši milovaní vedúci MALYNÁRa

Ako bude

Posledné voľné miesta na TMM

Na našom jedinečnom letnom Tábore mladých matematikov sú už len posledné voľné miesta. Neváhaj preto a ak chceš stráviť nezabudnuteľný týždeň, prihlás sa už teraz. Tábor sa bude konať 11. – 19.8.2018 na Počúvadle. Pozvánku aj prihlasovanie nájdeš na našej stránke.

Výlet

Nedokážeš vydržať, kým príde ďalšie sústredko? Potom je tu pre teba jarný výlet, kde sa môžeš stretnúť s ľuďmi, ktorých vídavaš zopárkrát za rok, a užiť si s nimi kopec zábavy! Pravdepodobne by si čakal nejakú informáciu o mieste a čase konania, no ako býva zvykom, to sa v tejto chvíli ešte nevie. Preto pozorne sleduj Facebookovú stránku alebo `http://malynar.strom.sk`. Tešíme sa na teba! :)

2% z daní

Aj tento rok môžu vaši rodičia venovať 2% zo svojich daní verejnoprospešným organizáciám, ako sme my (dokonca niektorí až 3%).
Peniaze získané z 2% v MALYNÁRi využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústredeniach...).
Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a pokojne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cieľavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh seminára, a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispejú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.
Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke nášho združenia `zdruzenie.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta/` a radi vám odpovieme na ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj mailom na `info@strom.sk`.
Ďakujeme!

Vzorové riešenia 1. série úloh letného semestra

1

opravovala **Zuzka Ontkovičová**
najkrajšie riešenia: Lucka Gálová a Katka Farbulová

100 riešení

Zadanie

„Počet mojich mincí je 929-ciferné číslo. Každé dve jeho susedné cifry tvoria dvojciferné číslo, ktoré je násobkom 13. Posledná cifra počtu je 2. Aká je jeho prvá číslica?“

Riešenie

Najprv si vypíšeme všetky dvojciferné násobky čísla 13, ktoré by mohli tvoriť susedné cifry v hľadanom čísle: $13, 26, 39, 52, 65, 78, 91$. Ako je vidieť, žiadne dve z týchto čísel nemajú rovnakú cifru na mieste desiatok, ani na mieste jednotiek.
Zo zadania vieme, že hľadané 929-ciferné číslo končí cifrou 2. Jediné dvojciferné číslo, ktoré je násobkom 13 a končí 2, je 52, takže posledné dve cifry v hľadanom čísle budú 52. Ďalej sa pozrieme, aké číslo z dvojciferných násobkov 13 končí na 5. Jediným takýmto číslom je 65. Takto dostaneme posledné tri cifry hľadaného čísla: 652. Teraz z vypísaných násobkov 13 potrebujeme taký, ktorý končí na 6 – vyhovuje jedine číslo 26. Takto máme už štyri posledné cifry: 2652.
Opakovaním tohto postupu by sme mali hľadať dvojciferný násobok 13, ktorý končí cifrou 2. Ale v tejto situácii sme už boli. Keďže existuje len jediné vyhovujúce číslo, trojica cifier 652 sa bude v hľadanom čísle neustále opakovať.
Ak by malo číslo 927 cifier dokázali by sme ho vyskladať celé z takýchto trojíc, pretože 927 je násobkom čísla 3. 929 má však o 2 cifry viac. Ak vieme, že naše číslo končí cifrou 2 tak vyzerá nasledovne:

$$\mathbf{??}\ 652\ 652\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ 652\ 65\mathbf{2}$$

Ak uplatníme rovnaký postup ako na začiatku úlohy prídeme na to, že dvojica cifier, ktorá sa schováva za otáznikmi je 52 a naše číslo teda začína cifrou 5.

Komentár

Dôležité je uvedomiť si, že vždy existuje len jeden dvojciferný násobok 13 s potrebnou cifrou na mieste jednotiek. Preto môžeme povedať, že cifry 652 sa budú v hľadanom čísle dokola opakovať.

2 opravovali **Martin Šalagovič** a **Samo Krajči**

najkrajšie riešenie: Katka Farbulová

83 riešení

Zadanie

V meste žije presne 2018 obyvateľov, ktorí sú postupne očíslovaní od 1 do 2018 (každé číslo má práve jeden z obyvateľov). Každý obyvateľ má buď žlté, alebo čierne vlasy. Žltovlasí vždy klamú čiernovlasým a naopak a zároveň ľudia rovnakej farby vlasov si navzájom hovoria pravdu. Obyvatelia sa postavili do kruhu a každý prehovoril raz k nasledujúcemu človeku podľa poradia ich čísel (prvý k druhému, druhý k tretiemu a tak ďalej, až napokon dvetisícosemnásty k prvému). Každý z prvých 2016 ľudí povedal: „Človek dve miesta predo mnou má vlasy rovnakej farby ako ja.“ (Prvý to povedal druhému o treťom, druhý tretiemu o štvrtom atď.) Človek číslo 2017 povedal: „Prvý človek má vlasy inej farby ako ja.“ Posledný človek povedal: „Mám žlté vlasy.“ Kto má vlasy akej farby?

Riešenie

Prvý obyvateľ buď klame, alebo hovorí pravdu. Na to aby hovoril pravdu, tak druhý musí mať rovnakú farbu vlasov ako on, a potom na základe pravdivého výroku prvého má rovnakú farbu aj tretí obyvateľ. Tak musí hovoriť pravdu aj druhý, pretože nasledujúci obyvateľ má rovnakú farbu vlasov ako on, ako sme už zistili. Zisťujeme tak, že aj štvrtý obyvateľ má rovnakú farbu vlasov ako prví traja. Podobne vieme pokračovať až k dvetisícšestnástemu obyvateľovi, ktorý tiež pravdivo povie o dvetisícosemnástom, že má rovnaké vlasy ako on. V tomto prípade majú všetci rovnakú farbu vlasov. Problém nastáva pri výroku dvetisícsedemnásteho obyvateľa, ktorý musí hovoriť pravdivo: ”Prvý človek má iné vlasy ako ja”. No my vieme, že to nie je pravda, pretože všetci majú vlasy rovnakej farby. Predpoklad, že prvý obyvateľ hovorí pravdu nás priviedol k sporu. Prvý obyvateľ preto musí klamať.

Na to, aby prvý obyvateľ klamal, musí mať druhý vlasy inej farby ako on. Na základe nepravdivého výroku prvého obyvateľa, že tretí má vlasy rovnakej farby ako on, má tretí vlasy inej farby ako prvý a teda rovnakej farby ako druhý. Potom druhý pravdivo hovorí, že štvrtý má vlasy rovnakej farby ako on. Podobne ako v prvom odseku, aj teraz vieme postupovať reťazou ľudí rovnakej farby vlasov až po dvetisícšestnásteho obyvateľa, ktorý pravdivo povie, že aj dvetisícosemnásty má rovnaké vlasy ako on. Všetci okrem prvého teda hovoria pravdu a zatiaľ sme sa ku žiadnemu sporu nedostali. Stále však máme dve možnosti – buď má prvý žlté vlasy a ostatní čierne, alebo naopak.

Teraz sa pozrieme na výrok posledného obyvateľa. Vieme, že nasledujúci človek je prvý obyvateľ a má inú farbu vlasov ako on. Dvetisícosemnásty obyvateľ preto klame, a ak tvrdí, že má žlté vlasy, v skutočnosti ich má čierne. Dostávame tak jediného kandidáta na riešenie – prvý má žlté a všetci ostatní majú čierne vlasy.

Musíme však vykonať skúšku a overiť, či nájdené riešenie naozaj sedí. Prvý človek

musí klamať, a vraví, že tretí má iné vlasy, ako on, čo nie je pravda, teda to sedí. Pozrime sa ďalej na druhého až dvetisícšesnásteho obyvateľa. Za každým z nich nasleduje človek s rovnakou farbou vlasov, všetci teda hovoria pravdu, a hovoria, že človek o dve miesta v poradí nad nimi má rovnaké vlasy ako oni, čo je pravda, takže aj toto sedí. Potom tu máme dvetisícsedemnásteho obyvateľa, ktorý taktiež pravdivo vraví, že prvý človek má iné vlasy, ako on. No a nakoniec tu máme dvetisícosemnásteho človeka, ktorý prvému klame, že má žlté vlasy, čo taktiež sedí.
Našli a overili sme tak jediné riešenie.

Komentár

K tejto úlohe sa dalo pristupovať mnoho rôznymi spôsobmi, čo bolo vidieť aj na vašich riešeniach. Najčastejší spôsob bol rozdelenie na štyri možnosti podľa farieb prvých dvoch obyvateľov. Zopár z vás si napríklad najskôr všimlo, že prvý človek môže mať len žlté vlasy a podobne. Žiaľ, našlo sa aj zopár ľudí, ktorí nerozobrali všetky možnosti, alebo ešte horšie, iba našli riešenie a vôbec neodôvodnili, prečo iné riešenia nie sú. Taktiež častá, no už trochu menej závažná chyba bola, že ste neoverili správnosť nájdeného riešenia.

3

opravovali **Mimi Hanus** a **Martin Mihálik**

najkrajšie riešenia: Lucia Ševčovičová a Tomáš Kuník

104 riešení

Zadanie

Kráľ dal každému zo svojich troch synov 4 paličky s dĺžkami 6, 5, 8, 4 dm a povedal im: „Každú zo 4 paličiek môžete najviac raz prepíliť. Urobte to tak, aby ste mi priniesli paličky požadovaných dĺžok.
„Ty, najstarší, Mojmír, prines mi paličky s dĺžkami 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5 dm.“
„Ty, stredný, Svätopluk, prines mi paličky s dĺžkami 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6 dm.“
„A ty, môj najmladší synček, Predslav voláš sa, prines mi paličky s dĺžkami 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4 dm.“
Môže každý zo synov splniť zadanú úlohu? V prípade, že syn dokáže úlohu splniť, nájdite aspoň tri spôsoby, ktorými to dokáže. V prípade, že syn nedokáže úlohu splniť, zdôvodnite prečo.

Riešenie

Začnime prvým synom, teda Mojmírom. Ten dostal za úlohu doniesť paličky, ktoré spolu merajú 24 dm. Dostal však na to len paličky s celkovou dĺžkou 23 dm. Keďže pílením sa materiál pridať nedá, Mojmír svoju úlohu splniť nedokáže.
Pokračujme Svätoplukom. Ten dokáže splniť svoju úlohu napríklad spôsobmi uvedenými v tabuľke.

Dĺžka paličky	4 dm	5 dm	6 dm	8 dm
Prvá možnosť	4 dm	2 dm a 3 dm	1 dm a 5 dm	2 dm a 6 dm
Druhá možnosť	1 dm a 3 dm	5 dm	2 dm a 4 dm	2 dm a 6 dm
Tretia možnosť	2 dm a 2 dm	1 dm a 4 dm	6 dm	3 dm a 5 dm

A na koniec ostal Predslav. Ten dostal za úlohu priniesť spolu 9 paličiek. Potom, ako Predslav každú paličku rozpíli raz, dostane paličiek osem a už nebude môcť ďalej nič píliť. Predslav teda svoju úlohu splniť nedokáže.

Komentár

Úlohu ste poväčšine vyriešili bez chýb. Ak vám niečo robilo problémy, bola to predovšetkým stručnosť. Samozrejme, každé riešenie, v ktorom ukážete, že máte pravdu, je v poriadku, ale najkrajšie riešenia sú často práve tie, ktoré to zvládnu na najmenej zbytočných rečí. Napríklad u Mojmíra ste sa viacerí pustili do vypísania možností pílenia paličiek a, prirodzene, dospeli k záveru, že žiadne pílenie k splneniu jeho úlohy nevedie. Zabralo vám to ale určite viac slov, miesta a priestoru na chyby (z mnohých možností ľahko jednu vynechať) než overenie súčtu dĺžok paličiek. Podobne u Predslava počet paličiek v zadaní vylúči možnosť splniť zadanie skôr, než si vôbec uvedomíme ich dĺžky. Aj niekoľkonásobne dlhšie riešenia, než je to vzorové, získali po deväť bodov, ale v budúcnosti svoje i naše nervy ušetríte, keď napíšete svoje myšlienky nielen bez omylov, ale aj bez balastu.

4

opravovali **Martin Masrna** a **Michal Masrna**

najkrajšie riešenia: Eva Krajčiová a Lucia Ševčovičová

86 riešení

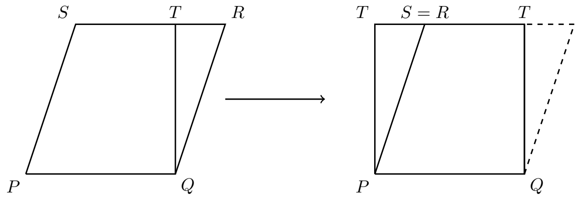
Zadanie

Záhrada má tvar obdĺžnika, ktorého vrcholy označíme po poradí A, B, C a D. Niekde na strane AB leží bod E. Niekde na strane CD ležia body F a G tak, že bod F je k bodu C bližšie ako bod G. V trojuholníkoch AGE a EFB sú vysadené žlté narcisy. V trojuholníkoch BCF, FEG a GAD sú vysadené červené ruže. Rozhodnite, ktorá z dvoch farieb zaberá v záhrade väčšiu plochu.

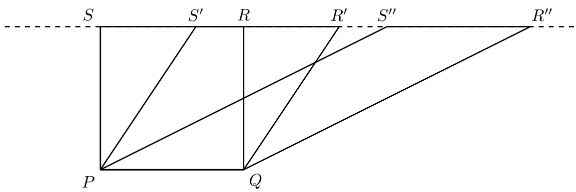
Riešenie

Pre tých z vás, ktorí nepoznajú pojem *výška*, ho na úvod vysvetlíme, pretože ho ešte budeme používať. Výškou trojuholníka na danú stranu nazývame takú úsečku, ktorá je na danú stranu kolmá a prechádza vrcholom trojuholníka protiľahlým k danej strane. Podobne aj v rovnobežníku je výška na danú stranu taká spojnica vrcholu s protiľahlou stranou, ktorá je na stranu kolmá. Rovnobežník je taký štvoruholník, ktorého protiľahlé strany sú rovnobežné. Na začiatok sa budeme snažiť ukázať tvrdenie, ktoré bude neskôr v úlohe kľúčové: všetky trojuholníky, ktoré majú rovnako dlhú jednu stranu a aj výšku na ňu, majú rovnaký obsah.

Začneme trochu širšie – vezmime si ľubovoľný rovnobežník. Označme jeho vrcholy $PQRS$ ako na obrázku a výšku na stranu PQ ako QT tak ako na ľavej časti obrázku:

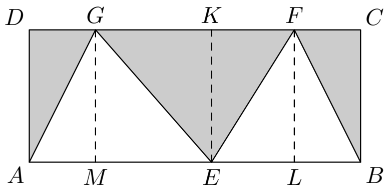


Všimnime si zaujímavú vec. Po vyznačenej výške QT vieme rovnobežník rozrezať na dva útvary, ktoré vieme zlepiť do obdĺžnika. To, že vznikne obdĺžnik vieme z vlastností rovnobežníkov. Vieme, že obsah obdĺžnika spočítame ako súčin veľkostí jeho strán. Obsah nášho zlepeného obdĺžnika ale musí byť rovnaký ako obsah pôvodného rovnobežníka. Vzali sme totiž rovnakú plochu a len sme ju preusporiadali. Keď sa dobre pozrieme na náš zlepený obdĺžnik, môžeme si všimnúť, že jedna jeho strana je pôvodná strana PQ a druhá je výška QT. Obsah tohto obdĺžnika a teda aj rovnobežníka je súčinom veľkostí strany PQ rovnobežníka a výšky na túto stranu. Čo to pre nás znamená? Ak by sme vzali hocijaký iný rovnobežník s rovnako dlhou stranou PQ a výškou QT, tiež ho vieme porozrezávať a pozliepať z neho obdĺžnik s rovnakým obsahom. Lepšie povedané, každé dva rovnobežníky, ktoré majú rovnako dlhú stranu a výšku na ňu, majú rovnaký obsah. Všetky také rovnobežníky si vieme predstaviť tak, že úsečku RS budeme ťahať po priamke, na ktorej leží. Toto zistenie ilustruje obrázok:



Rovnobežníky $PQRS$, $PQR'S'$ aj $PQR''S''$ vyzerajú rôzne, no obsah majú všetky rovnaký. Dokreslíme teraz nášmu rovnobežníku uhlopriečku PR. Tá nám ho pomyselne rozdelí na trojuholník PQR a RPS. Všimnime si, že strany PQ a RS sú rovnako dlhé a strany QR a PS sú tiež rovnako dlhé. Spomenuté trojuholníky majú preto rovnaké rozmery a teda nutne aj rovnaký obsah. Každý z trojuholníkov má preto obsah polovičný voči rovnobežníku $PQRS$. Vráťme sa naspäť k predchádzajúcemu obrázku. Hýbeme opäť úsečkou RS a každý vzniknutý rovnobežník rozdeľme uhlopriečkou PR. Uvedomme si, že všetky trojuholníky PQR, ktoré takto môžu vzniknúť majú rovnaký obsah. Ich obsah je totiž vždy polovičkou obsahu celého $PQRS$ a jeho obsah sa posúvaním RS nemení, ako sme už zistili v minulom odseku. Prichádzame

tak ku dôležitej myšlienke – *všetky trojuholníky, ktoré majú rovnako dlhú stranu a výšku na ňu majú rovnaký obsah.*
Teraz už vieme všetko, čo potrebujeme na riešenie úlohy. Začnime náčrtom, do ktorého si ešte pridáme body M, K a L. Body M a L nech ležia na AB tak, že MG aj FL sú rovnobežné s BC. Bod K nech leží na CD tak, že KE bude rovnobežná s BC. Bez ohľadu na to, aká je počiatočná poloha bodov E, F a G, môžeme bod E posunúť po AB tak, aby sa dostal medzi M a L. Celková plocha, na ktorej sú vysadené ruže a plocha na ktorej sú vysadené narcisy sa pritom nezmení. Prečo je to tak? Trojuholníky DGA a FCB ostanú posunom nedotknuté. Pri posúvaní bodu E síce trojuholník GEF mení tvar, ale jeho strana GF ostáva stále rovnako dlhá a jeho výška na túto stranu tiež – stále je rovnako dlhá ako BC. Spomeňme si teraz na tvrdenie, ktoré sme si dokázali (veta vytlačená nakloneným písmom). Obsah trojuholníku GEF sa tak nemení, a tým pádom sa posúvaním nemení ani obsah plochy s ružami. Keďže rozmery záhrady sú stále rovnaké a časť s ružami má rovnakú plochu, obsah plochy s narcismi sa posunutím bodu E tiež nemohol zmeniť.
Rozdeľme si teraz záhradu čiarkovanými čiarami na pomyselné obdĺžniky podľa obrázku:



Všimnime si, že v každom z obdĺžnikov $AMGD$, $MEKG$, $ELFK$ a $LBCF$ máme dva trojuholníky. Každá dvojica trojuholníkov má rovnaké rozmery, a tým pádom aj obsah. Uvedomme si ešte, že v každom z obdĺžnikov patrí jeden trojuholník časti záhrady s narcismi a druhý časti s ružami. V každom z obdĺžnikov teda zaberajú kvety rovnaké plochy. V celej záhrade má preto plocha s ružami tiež rovnaký obsah ako plocha s narcismi. Tvrdenie platí pre všetky polohy bodov E, F, G. Nech sú totiž body G a F v ľubovoľnej polohe, bod E vieme z každej možnej pozície vždy posunúť tak, aby bol medzi M a L. Obsahy častí s kvetmi sa tým nezmenia, a my použijeme znovu úvahu s delením na obdĺžniky. Úloha je tým vyriešená.
Možno sa teraz pýtate, načo boli nutné všetky kroky s rovnobežníkmi a posúvaním bodu E. Posunutie bodu E medzi M a L je však kľúčové. Ak by sa body nachádzali v inej vzájomnej polohe, celú úvahu s obdĺžnikmi by sme mohli zahodiť. Prečo je to tak? To už nechávame na zamyslenie pre vás. Skúste takú polohu bodov, kde E neleží medzi M a L. Vieme teraz rozdeliť záhradu na obdĺžniky?

Komentár

Pre tých z vás, ktorí použili vzorec pre obsah trojuholníka úloha vôbec nebola náročná. Dala sa však riešiť aj bez toho, ale potom bolo treba dávať pozor, aby ste pokryli vo svojom riešení naozaj všetky prípady rozloženia bodov E, F a G. Problém nastával práve vtedy, ak ste neuvážili prípady, kde bod E neleží medzi M a L. Taktiež niektorí z vás si dosadili konkrétne hodnoty čísel, alebo sa snažili z obrázka niečo odmerať. Tieto postupy nie sú matematicky korektné, a tak sme vám za ne nemohli udeliť body. Do budúcna sa teda takýmto riešeniam vyvarujte.

5

opravovali **Lenka Hake** a **Roman Staňo**

najkrajšie riešenie: Marek Horváth

86 riešení

Zadanie

Ján strieľal do terča, ktorého zasiahnutím mohol získať 30, 12 alebo 6 bodov (za jeden zásah). Vystrelil najviac dvadsaťkrát, pričom každým výstrelom trafil terč. Je zaujímavé, že získal presne sedemnásťkrát viac bodov, ako bol počet jeho výstrelov. Koľko najviac a koľko najmenej bodov mohol Ján získať, keď získal nenulový počet bodov? Koľko zásahov na to potreboval?

Riešenie

Všimnime si, že 30, 12 aj 6 sú násobky čísla 6. Tým pádom mohol Ján každým zásahom zvýšiť počet bodov len o násobok 6 a preto aj jeho celkový počet bodov musel byť násobkom 6.

Zo zadania vieme, že počet bodov je sedemnásťkrát väčší ako počet výstrelov – počet bodov je teda tiež násobok 17. Číslo 17 však nie je násobkom 6. Na to, aby bol celkový počet bodov násobkom 6 aj 17 potom musí platiť, že počet výstrelov je násobok 6. Ak by totiž počet výstrelov násobkom 6 nebol, jeho sedemnásťnásobok by tiež nebol násbokom 6, čo je však v rozpore s naším zistením z prvého odseku.

Zo zadania tiež vieme, že počet výstrelov bol najviac 20, takže do úvahy prichádzajú len počty výstrelov 6, 12 a 18. Pre 0 výstrelov by bol bodový zisk nulový, čo zadanie vylučuje. Pre každý z uvedených počtov výstrelov by Ján získal sedemnásťkrát viac bodov, čiže po poradí 102, 204 a 306. Kandidátom na najmenší a najväčší počet bodov sú preto 102 a 306 bodov. Musíme však ešte overiť, či je nejakým spôsobom skutočne možné daný počet bodov dosiahnuť. Poľahky nájdeme napríklad:

102 bodov je možné získať na 6 výstrelov ako: $2 \cdot 30 + 3 \cdot 12 + 1 \cdot 6 = 102$.

306 bodov je možné získať na 18 výstrelov ako: $6 \cdot 30 + 9 \cdot 12 + 3 \cdot 6 = 306$.

Počty 102 a 306 preto skutočne predstavujú najmenší a najväčší možný bodový zisk.

Komentár

Mnoho z vás správne určilo výsledok, ale nedostatočne vysvetlilo, prečo Ján nemohol získať menej resp. viac bodov. Väčšina riešiteľov prehlásila, že ďalšie počty bodov skúšala strieľaním získať, ale iné riešenie nenašla. Ak už chcete postupovať takto je potrebné ukázať, že ste naozaj vyskúšali všetky možnosti. Ak tak neurobíte, nemôžete si byť svojím výsledkom istí. Práve vyskúšanie všetkých možností väčšina

buď nedotiahla dokonca alebo úplne vynechala.
Veľa pekných riešení stratilo body na chýbajúcom príklade získania bodov – ten je však nutný.
Niektorí zrejme úplne nepochopili zadanie a preto počítali s presne 20 výstrelmi, prípadne pozabudli, že počet výstrelov má byť sedemnásťkrát menší ako počet bodov a uviedli napr. k 102 bodom príklad na 4 výstrely. K tomu vám môžeme poradiť asi len to, aby ste sa nás nebáli opýtať, ak vám niečo nie je jasné.

6

opravovali **Viki Brezinová** a **Timka Szöllősová**
najkrajšie riešenia: Richard Prikler a Katarína Farbulová

73 riešení

Zadanie
Vo vrecúšku bolo 100 loptičiek štyroch farieb. Modrých bolo o toľko menej oproti červeným, ako bolo červených menej oproti žltým. 33 loptičiek sme náhodne vybrali. Medzi vybranými boli všetky zelené, ktoré vo vrecúšku boli, pričom zelená je medzi 100 loptičkami jediná najviac zastúpená farba. Okrem toho sme z každej farby vytiahli aspoň jednu loptičku a vytiahli sme trikrát viac červených ako modrých. Žltých sme vytiahli rovnaký počet ako modrých. V celom vrecúšku (medzi všetkými 100 loptičkami) je červených a žltých loptičiek dokopy viac ako zelených a modrých spolu. Koľko bolo v nádobe akých loptičiek a koľko akých sme vytiahli?

Riešenie
Koľko najmenej by sme mohli mať loptičiek zelenej farby? Ak by bolo z každej farby rovnako, modrých, žltých červených aj zelených by bolo 25. To nám nevyhovuje, lebo zelených musí byť najviac. Na to, aby bola zelená najzastúpenejšia farba, musí byť aspoň 26 loptičiek zelených.
Z vrecúška sme vybrali 33 loptičiek a z každej farby aspoň jednu. Preto medzi nimi mohlo byť maximálne 30 zelených. Medzi vytiahnutými boli všetky zelené a podľa zadania trikrát viac červených ako modrých alebo žltých. Ak by sme vytiahli viac než jednu modrú, napríklad dve, tak žlté by sme museli vytiahnuť tiež dve a červených trikrát toľko čo je dohromady 10 loptičiek inej než zelenej farby. To sa však vylučuje z predchádzajúcimi zisteniami, pretože by sme zelených museli vytiahnuť $33-10=23$ čo je menej než 26. Z vrecúška sme preto vytiahli 1 modrú, 1 žltú, 3 červené a 28 zelených loptičiek.
Už teda vieme, že zelených je 28 a preto vo vrecúšku muselo byť 72 loptičiek iných farieb. Modrých bolo o toľko menej oproti červeným, ako bolo žltých viac oproti červeným. Ak teda sčítame počet žltých a modrých dostaneme dvojnásobok počtu červených loptičiek. Ak k počtu modrých a žltých pripočítame ešte počet červených, dostávame tak vlastne trojnásobok počtu červených. Ako sme už zistili, súčet počtov loptičiek okrem zelenej je 72. Červených loptičiek je preto $72:3=24$.
Na to aby sme splnili poslednú podmienku zadania, ktorou je že súčet počtov čer-

vených a žltých loptičiek je viac než modrých a zelených, musí byť tento súčet väčší ako 50. Červených je 24 a preto žltých musí byť aspoň 27. 28 ich byť nemôže lebo zelených loptičiek musí byť najviac. Preto jediná vyhovujúca možnosť je 28 zelených, 27 žltých, 24 červených a zvyšných 21 loptičiek bolo modrých.

Komentár

Väčšine z vás sa podarilo prísť na správny výsledok, avšak mnohí ste neukázali, že tento výsledok je jediný možný. V takýchto úlohách nestačí len nájsť jeden výsledok a ukázať, že vyhovuje zadaniu, ale treba aj vysvetliť, prečo žiaden iný výsledok určite nevyhovuje. To sa dalo viacerými spôsobmi. Okrem spôsobu vo vzorovom riešení, ste mohli aj systematicky skúšať možnosti, ktoré prichádzali do úvahy. Avšak pri takomto riešení je potrebné vyskúšať naozaj všetky možnosti, ktoré ste nevylúčili nejakou úvahou (a tiež napísať myšlienku, na základe ktorej ste vylúčili ostatné možnosti). Najčastejšou chybou totiž bolo, že ste vyskúšali len zopár náhodných možností, ale zvyšné ste ani nevyskúšali, ani iným spôsobom nevylúčili. Takéto riešenie nie je správne, lebo si nemôžeme byť istí, či nevyhovuje aj nejaká z možností, ktorú ste zabudli vyskúšať (alebo len napísať do riešenia; to však my nevieme, ak nám to nenapíšete).

Autori vzorových riešení: Žaneta Semanišinová, Henrieta Micheľová, Roman Staňo, Kristína Mišlanová, Peter Kovács, Jakub Genči, Florián Hatala

Zadania 2. série úloh letného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do **30. apríla 2018**

Úloha 1

27 vojakov bolo ubytovaných v izbách s tromi alebo štyrmi lôžkami, jazdci zvlášť a pešiaci zvlášť. Nájdite všetky možnosti, ako mohli byť vojaci do izieb rozdelení, keď boli všetky izby obsadené úplne. Trojlôžkových izieb bolo obsadených viac ako štvorlôžkových, pričom štvorlôžková izba bola obsadená aspoň jedna. Jazdcov bolo aspoň 10 a pešiakov bolo viac ako jazdcov.

Úloha 2

Súčet trojciferného čísla $\overline{AAA}$ *a dvojciferného čísla* $\overline{BB}$ *je číslo* $\overline{CD6E}$. *A, B, C, D a E sú rôzne cifry. Zistite, aké hodnoty majú A, B, C, D a E.*

Úloha 3

Vojislav ukladá kamienky na niektoré políčka tabuľky 3×3 (na jednom políčku môže byť aj viac kamienkov). Potom si spočíta počet kamienkov v každom zo stĺpcov aj riadkov. Chce ich uložiť tak, aby bol každý z týchto šiestich súčtov iný. Koľko najmenej kamienkov musí použiť? Ako napríklad ich môže poukladať?

Úloha 4

Rozhodnite, na koľko najmenej rezov viete cukrový kváder $10 \times 8 \times 5$ rozplíliť, aby ste z neho mali kocky $1 \times 1 \times 1$. Jedným rezom viete rozpíliť súčasne aj viac oddelených telies.

Úloha 5

Chceme z 25 pretekárov vybrať 3 najrýchlejších, ale nemáme stopky. Na okruhu môže naraz súťažiť maximálne 5 pretekárov. Každý pretekár prejde okruh vždy za rovnaký čas. Rozhodnite, či môžeme určiť:

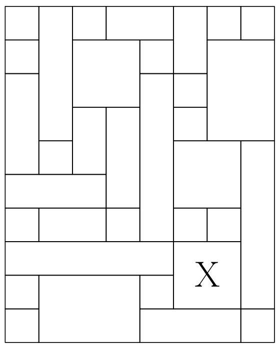
a) najrýchlejšieho pretekára počas šiestich kôl,
b) druhého najrýchlejšieho pretekára počas siedmich kôl,
c) tretieho najrýchlejšieho pretekára počas ôsmich kôl.

Ak na daný počet kôl nie sme schopní daného pretekára určiť, napíšte aj, prečo to nie je možné. Podobne, ak to možné je, napíšte, ako.

Máme pre vás aj bonusovú podúlohu, ktorá nebude hodnotená bodmi, no za jej správne vyriešenie môžete získať sladkú odmenu: Rozhodnite, či môžeme určiť tretieho najrýchlejšieho pretekára počas siedmich kôl. Nezabudnite poriadne zdôvodniť, prečo to nie je respektíve je možné.

Úloha 6

Na obrázku je mapa lesných ciest. Kôň Rafał je v ohraničenej časti lesa (označenej písmenom X). Koľkými rôznymi spôsobmi sa vie dostať Svorad z ľavého horného rohu lesa k Rafałovi, ak bude chodiť po cestách len smerom nadol alebo napravo? K Rafałovi sa dostane, ak bude na križovatke ciest susediacej s časťou lesa, kde je Rafał. Keď sa raz dostane k Rafałovi, zastane a ďalej už nejde.

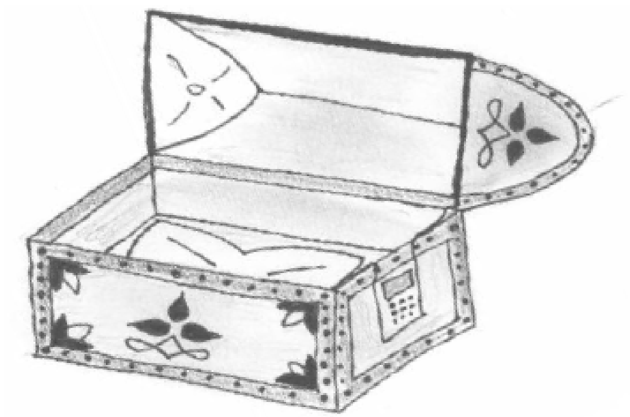


Poradie po 1. sérii letného semestra

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
1. - 8.	Lucia Chladná	Z6	GAMČA	9	9	9	9	9	9	0	**54**
	Eva Krajčiová	Z5	ZBe16KE	9	9	9	9	9	9	0	**54**
	Katarína Farbulová	Z6	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	0	**54**
	Natália Tkáčová	Z5	ZLevoSN	9	9	9	9	9	9	0	**54**
	Richard Vodička	Z6	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	0	**54**
	Teo Gertler	Z4	ZKošiBA	9	9	9	9	9	6	0	**54**
	Milan Jozef Pokorný	Z5	ZAKubTT	9	9	9	6	9	9	0	**54**
	Michal Iľkovič	Z6	ZBPPGPO	9	9	9	9	9	9	0	**54**
9. - 11.	Michal Vodička	Z4	ZBe16KE	7	9	9	9	-	9	0	**52**
	Katarína Chabová	Z5	ZLNovKE	9	9	9	9	8	-	0	**52**
	Martina Osuska	Z4	ZDrJDMA	9	2	9	7	9	9	0	**52**
12. - 14.	Ondrej Králik	Z6	GAlejKE	9	6	9	9	9	9	0	**51**
	Marek Horváth	Z6	GKonšPO	9	9	9	6	9	9	0	**51**
	Richard Prikler	Z4	ZVažePO	9	-	9	6	9	9	0	**51**
15. - 16.	Jakub Filek	Z5	ZBytča	8	1	9	9	8	8	0	**50**
	Ľubomíra Šenitková	Z6	GLipany	7	9	9	9	9	7	0	**50**
17. - 19.	Lucia Gálová	Z4	ZSokoBA	9	4	9	6	9	7	0	**49**
	Vlastimil Urda	Z6	ZBPPGPO	9	9	9	8	5	9	0	**49**
	Jakub Čaník	Z5	ZPožiKE	8	7	9	6	9	9	0	**49**
20. - 24.	Alex Fabrici	Z6	ZPAngKE	8	9	9	6	7	9	0	**48**
	Veronika Vodičková	Z6	GAlejKE	8	4	9	9	9	9	0	**48**
	Lukáš Jacko	Z6	ZKro4KE	6	9	7	9	8	9	0	**48**
	Alenka Bálintová	Z4	ZGaštZA	8	9	7	6	-	9	0	**48**
	Patrik Barnišin	Z6	ZBPPGPO	9	5	9	9	9	7	0	**48**
25. - 26.	Paulína Tkáčová	Z6	ZLevoSN	9	8	9	9	9	3	0	**47**
	Tomáš Hazucha	Z6	GMMHLM	8	9	7	9	5	9	0	**47**
27. - 28.	Natália Poliačiková	Z6	ZKro4KE	9	1	9	9	9	9	0	**46**
	Zuzana Mareková	Z6	ZKubrTN	8	5	9	9	6	9	0	**46**
29.	Radovan Milián	Z5	ZKro4KE	7	9	9	-	8	6	0	**45**
30.	Ondrej Tóth	Z4	ZHôrky	8	9	9	-	9	-	0	**44**
31. - 32.	Kalista Semancová	Z6	ZSNP1HE	8	6	9	9	8	3	0	**43**
	Michal Ferdinandy	Z4	ZPoliKE	8	4	9	6	4	7	0	**43**
33. - 35.	Martin Dudjak	Z6	SMládPP	9	1	9	9	4	9	0	**41**
	Ľudmila Krupová	Z5	ZCaMKE	9	-	7	6	9	5	0	**41**
	Šimon Stano	Z5	ZPAngKE	8	3	9	9	9	-	0	**41**
36.	Tomáš Kubrický	Z6	ZKro4KE	9	9	9	-	7	6	0	**40**
37.	Samuel Vangel	Z6	GVaršZA	7	0	9	6	8	9	0	**39**
38.	Jakub Trojanovič	Z6	ZŠmerPO	9	5	9	6	9	-	0	**38**
39. - 42.	Jakub Kukučka	Z4	ZFKráZC	8	-	5	2	9	4	0	**37**
	Lucia Ševčovičová	Z6	ZKubrTN	7	1	9	9	8	3	0	**37**
	Jakub Šimon Konrád	Z4	ZKe28KE	9	8	5	6	-	-	0	**37**
	Barbora Cimráková	Z4	ZGaštZA	7	6	7	6	4	-	0	**37**
43.	Viliam Karol Kubičár	Z6	ZOKožSN	8	1	9	6	8	4	0	**36**
44. - 45.	Matej Vojtaník	Z6	ZKro4KE	8	5	9	3	4	5	0	**34**
	Aneta Štefančínová	Z5	ZŠmerPO	8	0	7	9	8	1	0	**34**
46. - 47.	Oskar Cacara	Z5	ZKro4KE	6	1	9	6	8	2	0	**33**
	Alexandra Michalíková	Z5	ZKro4KE	8	1	9	-	9	5	0	**33**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
48.	Oliver Groh	Z5	ZKro4KE	7	1	9	6	8	-	0	**32**
49.	Katarína Adamková	Z5	ZAJHZRV	7	0	9	6	5	2	0	**31**
50. - 51.	Vladimír Slanina	Z6	ZKro4KE	9	1	9	1	5	5	0	**30**
	Samuel Gajdoš	Z4	3ZPJ2ZV	8	0	4	1	7	2	0	**30**
52. - 55.	Nina Pacholská	Z6	ZKro4KE	8	-	9	6	6	-	0	**29**
	Martina Matejková	Z6	ZKubrTN	9	1	7	4	5	3	0	**29**
	Juraj Stach	Z4	ZTSNPBB	8	-	7	6	-	-	0	**29**
	Stella Répássyová	Z5	ZAJHZRV	8	2	7	1	5	5	0	**29**
56. - 57.	Timotej Suvák	Z6	GJARPO	6	0	7	6	5	4	0	**28**
	Barbora Jenčová	Z6	ZKubrTN	8	1	7	6	4	2	0	**28**
58. - 59.	Matúš Chovančák	Z6	ZKro4KE	8	5	9	4	-	-	0	**26**
	Katarína Balážová	Z6	ZKubrTN	9	1	8	1	5	2	0	**26**
60. - 62.	Miriama Kmecová	Z5	ZKro4KE	4	-	9	9	-	3	0	**25**
	Matej Válek	Z5	ZKro4KE	5	0	9	-	9	2	0	**25**
	Lukáš Hanes	Z5	ZKro4KE	8	-	9	-	6	2	0	**25**
63.	Tomáš Vitko	Z6	ZOKožSN	8	-	9	-	7	-	0	**24**
64. - 66.	Filip Sabovčík	Z6	ZOKožSN	9	-	8	-	6	-	0	**23**
	Michal Badinka	Z4	3ZPJ2ZV	-	0	9	1	2	2	0	**23**
	Martin Kuchta	Z6	GAlejKE	4	-	9	6	2	2	0	**23**
67. - 68.	Jakub Babík	Z6	ZKro4KE	5	1	9	0	7	-	0	**22**
	Vladimír Boguský	Z6	ZJuhVnT	4	0	9	1	6	2	0	**22**
69. - 73.	Peter Varga	Z6	ZKro4KE	5	1	7	1	5	2	0	**21**
	Filip Olej	Z5	ZKro4KE	-	-	7	6	8	-	0	**21**
	Gregor Berta	Z4	ZMlynSC	7	7	-	-	-	-	0	**21**
	Samuel Torhány	Z6	GAlejKE	5	1	9	1	5	0	0	**21**
	Ema Repiská	Z5	ZFKráZC	-	-	9	9	3	-	0	**21**
74.	Róbert Mráz	Z6	3ZPJ2ZV	9	2	-	-	9	-	0	**20**
75. - 78.	Michal Kaško	Z5	ZKro4KE	6	-	9	-	4	-	0	**19**
	Klára Kováčová	Z6	ZKo12SO	8	0	5	0	2	4	0	**19**
	Veronika Ujhelyiová	Z5	ZJAKTvr	7	-	9	-	3	-	0	**19**
	Sára Titková	Z6	ZJuhVnT	4	0	9	1	4	1	0	**19**
79. - 82.	Simona Gergelyová	Z5	ZAJHZRV	4	0	9	0	4	1	0	**18**
	Tomáš Daňo	Z5	ZDruzKE	5	1	5	0	4	2	0	**18**
	Martin Šamaj	Z6	ZKubrTN	4	0	5	3	2	4	0	**18**
	Tomáš Kuník	Z6	ZKubrTN	9	0	9	0	-	-	0	**18**
83.	Ema Lola Škombárová	Z6	ZKro4KE	9	-	8	-	-	-	0	**17**
84.	Adam Munka	Z5	ZKro4KE	9	-	7	-	-	-	0	**16**
85. - 88.	Efram Vass	Z6	ZKro4KE	2	0	9	0	4	0	0	**15**
	Nina Karabellyová	Z6	ZTSNPBB	3	4	-	-	8	-	0	**15**
	Richelle Andrássyová	Z5	ZKro4KE	-	-	7	1	5	2	0	**15**
	Tomáš Jakubec	Z6	ZOKožSN	1	-	9	1	4	-	0	**15**
89. - 90.	Henrietta Antožy	Z6	ZKro4KE	8	0	4	-	-	2	0	**14**
	Lenka Palušáková	Z6	ZOKožSN	7	-	5	0	-	2	0	**14**
91.	Alexandra Krnáčová	Z6	3ZPJ2ZV	3	0	9	0	1	-	0	**13**
92.	Martin Šedovič	Z6	ZKro4KE	-	-	6	6	-	-	0	**12**
93. - 94.	Eduard Lehocký	Z6	ZKro4KE	6	-	5	-	-	-	0	**11**
	Martin Antoš	Z5	ZKro4KE	4	0	7	-	-	-	0	**11**
95.	Adela Danková	Z6	3ZPJ2ZV	3	-	7	-	-	-	0	**10**
96.	Pavol Šamko	Z5	ZKro4KE	5	-	4	-	-	-	0	**9**
97. - 102.	Laura Sofia Hliváková	Z5	ZKro4KE	3	1	-	2	-	2	0	**8**

Poradie	**Meno a priezvisko**	**Ročník**	**Škola**	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**PS**	**CS**
	Jakub Lukáč	Z6	ZJuhVnT	1	-	5	-	2	-	0	**8**
	Samuel Hirko	Z4	3ZPJ2ZV	1	0	3	0	1	0	0	**8**
	Samuel Maco	Z5	ZKro4KE	-	-	5	1	-	2	0	**8**
	Šimon Pribičko	Z5	ZKro4KE	-	-	5	3	-	-	0	**8**
	Šimon Stripaj	Z5	ZKro4KE	-	-	8	0	-	-	0	**8**
103. - 104.	Dušan Ivan	Z5	ZKro4KE	-	1	-	6	-	-	0	**7**
	Alica Juhásová	Z5	ZKro4KE	-	0	7	0	-	0	0	**7**
105.	Hana Volšíková	Z5	ZKro4KE	-	-	5	-	1	-	0	**6**
106. - 107.	Beatka Kováčová	Z5	ZAJHZRV	0	0	2	-	2	1	0	**5**
	Stelka Jamborová	Z6	GAlejKE	2	1	-	-	2	-	0	**5**
108. - 109.	Marek Kováč	Z6	ZAJHZRV	0	0	3	0	1	0	0	**4**
	Dávid Györi	Z5	ZKro4KE	4	0	-	-	-	-	0	**4**
110.	Bogdana Studenková	Z5	ZKro4KE	-	-	2	0	1	0	0	**3**
111.	Yarden Cohen	Z6	ZKro4KE	2	0	-	-	-	-	0	**2**
112. - 114.	Michal Vokál	Z5	ZKro4KE	-	-	0	-	-	-	0	**0**
	Adam Ilčík	Z5	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	0	**0**
	Oskar Vizi	Z5	ZKro4KE	-	0	-	0	-	-	0	**0**



Názov: MALYNÁR – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Apríl 2018 • Letný semester 27. ročníka
Internet: `malynar.strom.sk`
E-mail: `malynar@strom.sk`

Organizátor: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk