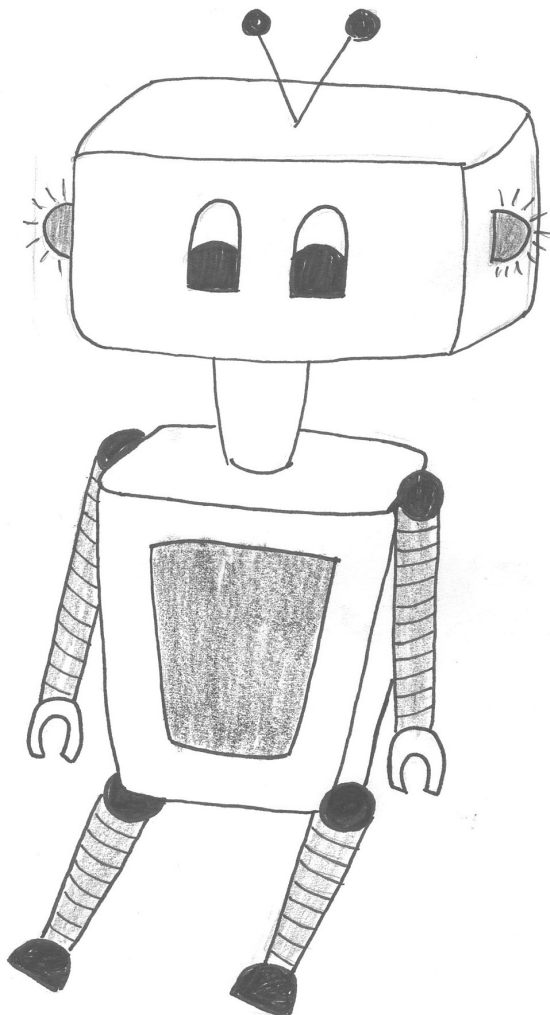


# MALY NÁR

ČÍSLO 1 — ROČNÍK 28

[malynar.strom.sk](http://malynar.strom.sk)



## Ahojte!

Dni plné oddychu, zábavy, kúpania a ničnerobenia sa skončili a znova je tu september. Prináša so sebou začiatok školského roka a povinností, ale nesmúťte. Znamená to aj nové zážitky, vedomosti, kamarátov a nový časopis so super príbehom a príkladmi. Tých najlepších z vás potom bude za odmenu v zime čakať skvelé sústredenie. Preto neváhajte a začnite s počítaním už dnes. Prajeme vám veľa šťastia a dobrých nápadov!

Vaši milovaní vedúci MAMINÁŤA

## Ako bolo

### *Tábor mladých matematikov*

Aj tento rok sa stretlo vyše 30 účastníkov na Tábore mladých matematikov, ktorý sa tento rok konal v Penzióne pod Sitnom.

Po príchode na miesto sme prešli rekvalifikačným kurzom, ktorý z nás spravil podnikateľov, ako sa patrí. Prešli sme od základov, akými sú marketing či reklama, k pokročilejším dôležitostiam, ako napríklad reputácia a dobré meno medzi obyvateľmi. Po týchto začiatkoch sme mohli konečne plnohodnotne rozvíjať naše firmy a venovať sa vlastným patentom. Vtom sme však prišli na to, že náš blahodarca, Lord Cashington, si patentoval presne ten istý nápad vždy deň vopred, čím nás absolútne vyšachoval. Keďže sme chceli zachrániť naše firmy, museli sme prísť na to, v čom je problém. Po zistení, že Lord Cashington má doma portál, ktorým sa pozerá do budúcnosti, sme sa rozhodli ho zlikvidovať. Bola to trnistá cesta, museli sme prejsť cez Cashingtonovu ochranku a jeho trezor. Avšak nás nič nezastavilo, zariadili sme, aby sa Cashington prepadol svojím portálom a už nikdy nevrátil, a spokojne sme mohli rozvíjať naše firmy aj naďalej.

Okrem prednášok a seminárov na zaujímavé matematické i nematematické témy sme zažili kopec zaujímavých hier a športov. Nezabudnuteľnými ostanú všetky zážitky spojené najmä s kamarátmi, s ktorými sa uvidíme zase raz až o rok, a už teraz sa na to tešíme.

## Pravidlá súťaže

### Priebeh

Korešpondenčný matematický seminár **MALYNÁR** je súťaž pre žiakov štvrtého až šiesteho ročníka základných škôl, resp. prímý na osemročnom gymnáziu. Zapojiť sa môžu aj mladší. **MALYNÁR** prebieha korešpondenčnou formou – počas zimnej aj letnej časti dostaneš po dve série po 6 úloh, ktoré vyjdú naraz v septembri a vo februári. Riešenia tých úloh, ktoré sa ti podarí vyriešiť, a tých, kde prídeš aspoň na časť riešenia, pošli do uvedeného termínu na našu adresu, alebo ich nahraj pod svojím profilom na našej webovej stránke. My ich opravíme, obodujeme a zostavíme poradie všetkých riešiteľov. Opravené riešenia úloh spolu s ďalším číslom časopisu, v ktorom nájdeš správne riešenia a poradie, dostaneš do školy alebo ich nájdeš na našej webovej stránke. A ak sa budeš snažiť a skončíš medzi najlepšími, môžeš sa tešiť na 6-dňové sústredenie v peknom prostredí nabité zaujímavým programom, športom, hrami, matikou a skvelými kamarátmi.

### Registrácia

Korešpondenčný matematický seminár **MALYNÁR** je jednou z aktivít národného projektu IT Akadémia – vzdelávanie pre 21. storočie ([itakademia.sk](http://itakademia.sk)). Skôr, ako odošleš prvé príklady (poštou, alebo elektronicky), je preto potrebné, aby si sa na túto aktivitu prihlásil.

Ak si sa zapojil do niektorej z našich aktivít v rámci národného projektu, tak už máš konto na portáli [registracia.itakademia.sk](http://registracia.itakademia.sk). V takomto prípade stačí, ak sa prihlásiš na aktivitu Korešpondenčný matematický seminár **MALYNÁR** na tomto portáli.

Ak ešte nie si registrovaný v projekte, vyplň nám kontaktné údaje v dotazníku, ktorý nájdeš na stránke seminára, a my ti konto vytvoríme.

Registrácia je povinná, ak chceš, aby tvoje riešenia boli opravené. Vďaka tomu, že seminár je jednou z aktivít projektu, sú všetky aktivity v rámci neho pre teba bezplatné, a tak, ak sa budeš snažiť, budeš sa môcť zúčastniť sústredenia v Danišovciach bezplatne a pre najlepších troch riešiteľov sú pripravené knižné poukážky.

S registráciou nech ti pomôžu rodičia alebo učiteľ v škole. V prípade, že máš ty alebo majú tvoji rodičia, resp. učitelia akékoľvek otázky k registrácii, neváhajte nás kontaktovať e-mailom na [sutaze@itakademia.sk](mailto:sutaze@itakademia.sk).

### Prihlásenie

Prihlásenie do semestra prebieha online, na našej webovej stránke [malynar.strom.sk](http://malynar.strom.sk). Ak si novým riešiteľom alebo ešte nemáš vytvorený účet, zaregistruj sa a vyplň povinné údaje v užívateľskom profile. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole (prázdniny...), v prípade pozývania na sústredenie a tiež, aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej

časti semináru. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia, ak si ich poslal elektronicky.

Prihláška (vyplnenie profilu) je povinná pre všetkých riešiteľov.

### *Bodovanie*

Za správne vyriešenú úlohu získaš 9 bodov, za čiastočne správne alebo neúplné riešenie primerane menej. Do celkového poradia sa započítavajú body za:

- **šiestaci a príma:** všetky vyriešené úlohy,
- **piataci:** päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh,
- **štvrtáci:** päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh.

Tretiaci a mladší budú hodnotení rovnako ako štvrtáci.

### *Príklad*

Traja bratia, šiestak Vlado, piatak Jaro a štvrták Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) – za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal  $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$  bodov, Jaro  $(3 + \underline{2} + 4 + 5 + 4) + 2 = 20$  bodov a Marcel  $(3 + 2 + 4 + \underline{5} + 4) + 5 = 23$  bodov. Jasné, nie?

### *Riešenia po termíne*

Ak svoje riešenie pošleš po termíne odovzdania, riešenie ti opravíme len v prípade, že nám bude doručené do štyroch dní od termínu série. V tomto prípade ti za oneskorenie strhneme body. Body sa strhávajú nasledovne, podľa dĺžky omeškania:

- do 24 hodín: 2/3 bodov zaokrúhlené nahor,
- viac ako 24 hodín a do štyroch dní: 1/2 bodov zaokrúhlená nahor,
- viac ako štyri dni: riešenie neopravujeme.

Vo výnimočných prípadoch môžeme body za riešenie neznižiť.

### *Odpisovanie*

Body sa, samozrejme, bez výnimky strhávajú aj za odpisovanie. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie).

### *Ako písať riešenie*

Úlohy rieš samostatne, neodpisuj ani nikomu nedávaj odpisovať, pretože za to **budeme strhávať body**. Výsledok úlohy, aj keď je správny, **nestačí**. Tvoje riešenie

musí obsahovať podrobný **myšlienkový postup** – vysvetlenie, ako si pri riešení úlohy postupoval. Slovamí rozhodne nešetri. Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier formátu A4, ak je na viacerých listoch, zopni ich. Texty zadaní odpisovať nemusíš. Každé riešenie musí mať v hlavičke **tvoje meno, triedu, školu a číslo úlohy**. Riešenia posielaj na adresu:

**Združenie STROM, PF UPJŠ Jesenná 5, 041 54 Košice.**

Pod odosielateľa uveď výrazne **MALYNÁR**.

Riešenia môžeš taktiež nahrávať pomocou založeného účtu na našej webovej stránke [malynar.strom.sk](http://malynar.strom.sk). Všetky riešenia môžeš odovzdávať do 20:00. Dbaj na presné **dodržanie termínu** odovzdania, či už budeš riešenia posielat poštou, či nahrávať na našej stránke (za oneskorenie ti **budeme strhávať body**). V prípade technických problémov na našej strane posielajte riešenia na e-mailovú adresu [riesenia@strom.sk](mailto:riesenia@strom.sk) s predmetom **MALYNÁR** vo formáte PDF (každý príklad v samostatnom súbore) najneskôr v deň termínu série do 20:00. Riešenia budú prijaté a opravené len v prípade, že tvoj profil je kompletne vyplnený. (Pozor na to, že maximálna veľkosť mailu je 10MB.)

### **Webová stránka**

Ak máš nejaké otázky na nás alebo k zadaniam, tak neváhaj navštíviť naše webové stránky. Pri každom príklade je diskusia, ktorá slúži na to, aby si sa mohol opýtať na nejasnosti ohľadom zadaní. Ak ťa zaujíma niečo o našom seminári (či už tomto alebo o tých pre starších) alebo by si len chcel pokecať s kamarátmi či zorganizovať nejakú akciu, tak sa neboj a zapoj sa do debaty na našom webe. Ďalšia možnosť, ako nás kontaktovať, je mailom na adresu [malynar@strom.sk](mailto:malynar@strom.sk).

## *Pár dobrých rád*

Tu je zopár tipov a trikov, o ktorých si myslíme, že ti v budúcnosti pomôžu.

### *Základom je pochopiť zadanie*

Ak si už niekoľkokrát čítaš zadanie, no stále si nevieš rady, máš tieto možnosti:

- Opýtaj sa svojich rodičov. Ver alebo nie, väčšinou ti dokážu pomôcť s pochopením zadania.
- Opýtaj sa nás. Nájdi príklad na našej stránke a v sekcii Diskusia sa nás môžeš opýtať. Vždy ti radi pomôžeme.

### *Skúšať, skúšať, skúšať...*

Možno to znie prekvapivo, pretože vetu „Skúšal som a vyšlo mi,“ alebo „Prišiel som na to skúšaním,“ vidíme v tvojom riešení obvykle neradi. Dosadiť si nejaké čísla ale nie je vôbec zlý začiatok. Takéto skúšanie (dosadzovanie) rôznych hodnôt, až kým nenarazíš na správny výsledok, však nie je matematický postup, ktorý by sme hodnotili veľkým bodovým ziskom. Je to spôsob, ktorý je tu pre teba, aby ti ukázal, odkiaľ približne „fúka vietor“, ak na začiatku nevieš, ako príklad vyriešiť.

### *Kresliť, kresliť, kresliť...*

Kto nerád kreslí? Ak si príklad nakreslíš, môže ti to veľmi pomôcť. Nie vždy je ľahké si úlohu predstaviť. Bude sa ti jednoduchšie rozmýšľať, ak to, čo máš napísané v zadaní, uvidíš na obrázku priamo pred sebou. Kreslenie ti ukáže nové spôsoby, ako sa na príklad dá pozrieť.

### *Pozrimeže, na niečo som asi prišiel!*

Dôležité je vysvetliť, čo to vlastne je, prečo to tak funguje, a v neposlednom rade názorne ukázať, ako si prišiel na to, že je to pravda. Ak to vieš vysvetliť aj po matematickej stránke, tak je to obrovské plus. Tak sa totiž rodí 9-bodové riešenie.

### *Všetko si skontroluj*

„Našiel som výsledok, o ktorom si myslím, že je správny, a mám aj postup. Dokonca viem vysvetliť, ako som naň prišiel.“

To si už skoro hotový. Teraz však prichádza dôležitá časť! Všetko si skontroluj, logická či numerická chyba ostane vždy chybou, ak ju prehliadneš. Daj si tiež pozor, aby si aj napriek správne mu riešeniu nakoniec neodpovedal na inú otázku, než na ktorú sme sa v zadaní pýtali.

Ak sme ti napísali, že z tvojho riešenia nám nie je jasné, ako si postupoval, neber to tak, že sme ťa pochopiť nechceli. Riešeniam spravidla rozumieme, no plný počet dostane len ten, kto dokáže vysvetliť, prečo je správne.

## Zadania 1. série úloh zimného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do **22. októbra 2018**

*Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na [malynar.strom.sk](http://malynar.strom.sk).*

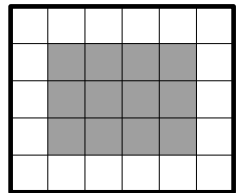
- Alex, poď na večeru!
- Nemôžem, mám dôležitú prácu.
- Zase márneš čas s tou plechovou bedňou?!

Mama nahnevane zvýšila hlas na svojho syna. Alex je talentovaný malý chlapec s potenciálom vedca. „Mami, veď si robím domáce úlohy,“ zaklamal Alex. Ale pravda bola iná. Nebolo to prvýkrát, čo musel hľadať výhovorky, aby sa mohol tajne venovať svojmu výtvoru. Nemal žiadneho súrodenca ani veľa kamarátov, a tak vznikol Andy Roid. Jeho robot. Celé to začalo pred štyrmi rokmi a postupom času sa z obyčajnej kôpky plechu stal nielen produkt umelej inteligencie, ale aj jeho verný priateľ a ochranca. Venoval mu veľa času a energie, avšak jeho rodičia ho v tejto aktivite nepodporovali a nechceli, aby zbytočne mrhal svojím talentom. Namiesto toho sa naňho spoliehali, že o pár rokov zdedí rodinný podnik a bude pokračovať v ich šľapajách.

„No to aj dúfam,“ zakričala naňho mama z prvého poschodia. V skutočnosti znova vylepšoval svojho robota. Akurát mu vymieňal jeho pokazený čip.

### Úloha 1

Čip je v tvare obdĺžnika a skladá sa zo sivých jednotkových štvorcov. Tento obdĺžnik je po obvode kompletne ohraničený vrstvou bielych jednotkových štvorcov. Štvorce sa dotýkajú vždy celou stranou a vrstva má šírku jedného štvorca. Obrázok ukazuje obdĺžnik, ktorý sa skladá z 12 vnútorných a 18 vonkajších.



- a) Nakreslite taký obdĺžnik, ktorý sa skladá zo 6 vnútorných a 14 vonkajších štvorcov.
- b) Rozhodnite, či existuje obdĺžnik, ktorý sa skladá zo 6 vnútorných a 16 vonkajších štvorcov.
- c) Máme obdĺžnik, ktorý je tvorený 20 vonkajšími štvorcami. Zistite všetky možné počty vnútorných štvorcov, ktoré môžu tvoriť daný obdĺžnik.
- d) Dokážte, že existuje práve jeden obdĺžnik tvorený 42 vnútornými štvorcami taký, že počet príslušných vonkajších štvorcov nie je násobkom 5.

Svoju prácu dokončil a zišiel dolu. „Odložil si si ten nový kód, však?“ opýtala sa mama. Prednedávnom si dali zabezpečiť vchodové dvere kódom, ktorý mal chrániť

Andyho pred vonkajším svetom. Robot bol natolko inteligentný, že kľúče už nestačili. „Áno, dokonca som si ho zašifroval, aby naň nikto iný neprišiel.“ Kód je hocijaké dzivé číslo.

## Úloha 2

*Dzivé číslo je také štvorciferné číslo, ktorého:*

- *súčet prvých dvoch číslic je rovnaký ako súčet posledných dvoch číslic,*
- *súčet krajných dvoch číslic je rovnaký ako vnútorných dvoch číslic.*

*Zistite, koľko je dzivých čísel, a nezabudnite odôvodniť, že sú to všetky. Štvorciferné číslo nemôže mať na mieste tisícov nulu.*

Papierik so šifrou však ostal len tak pohodený na stole. Alex sa večere takmer ani nedotkol a ponáhlal sa dokončiť výmenu čipu. „Kam si sa vybral?“ spýtala sa mama, no Alex ju ignoroval. To robiť nemal. Uvedomil si to vo chvíli, keď počul mamin hysterický krik. Už jej praskli nervy, skôr či neskôr to muselo prísť. Rodičia nepodporovali jeho záľubu a nepripisovali jej dôležitosť. Prekážalo im, že sa nevenoval viac budúcnosti, ktorú mu oni vnucovali. Namiesto toho trávil čas len s niečím umelým a nereálnym. Jej krik bol natolko hlasný, že ho započul aj Andy. Ostré slová, ktoré mama vypúšťala z úst, ho zasiahli pri srdci, ktoré ani nemal. Jeho podstatou bolo chrániť Alexa. Zhodnotil situáciu a rozhodol sa, že najlepším riešením bude, ak odíde a už nikdy sa nevráti. Jediná vec, na ktorej Andymu záležalo, bolo Alexovo šťastie, ktoré mohlo byť ohrozené jeho prítomnosťou. Pobalil si skrutky a náhradné diely, naposledy sa zahľadil na Alexovu izbu, v ktorej prežil celý svoj život. Pri dverách si spomenul, že vchod je zakódovaný, no vtom sa mu vybavil papierik so šifrou na Alexovom stole. Vďaka nadobudnutým znalostiam prišiel na spôsob, ako odomknúť vchod, a nenápadne sa vykradol von. Medzitým sa atmosféra doma mierne zlepšila, aj napriek tomu bol Alex nesvoj a ani si nevšimol, že mu v izbe niečo chýba. Zrazu mu zavolať spolužiak, že už sú zverejnené výsledky zo súťaže v robotike, ktorej sa nedávno zúčastnil.

## Úloha 3

*Finále súťaže o najlepšieho robota sa zúčastnili Alex, Laura a Tom. Každý z 22 porotcov pridelil finalistom 1, 2 alebo 3 body — každému iný počet. 3 body získal súťažiaci za prvé miesto, 2 body za druhé miesto a 1 bod za tretie miesto. Alex získal rovnako veľa prvých a tretích miest. Druhých miest mal o štyri viac než prvých. Laura a Tom získali rovnako veľa prvých miest, avšak druhých miest mala Laura dvakrát viac než Tom. Kto vyhral finále? Koľko získal bodov?*

Keď išiel oznámiť Andymu výsledok, zistil, že ho nevie nikde nájsť. Prehľadal každý kút domu a premkol ho strach o svojho najlepšieho kamaráta. Príčinu tušil. Jediný dôvod, prečo by bol Andy odišiel, bol v záujme jeho dobra a ochrany. Nezostávalo mu nič iné, než sa vydať ho hľadať. Vonku naňho číhalo veľké nebezpečenstvo. Andy



to však ešte netušil. Jediným riešením preňho bolo vrátiť sa tam, odkiaľ prišiel. Na šrotovisko.



...

V pivnici blikalo svetlo. Zúfalstvo v miestnosti bolo cítiť viac ako ostrý zápach veвериčieho trusu, ktorý slúžil ako organické hnojivo pre jeho mäsožravé rastliny. Dr. Haselnuss posedával na nízkej stoličke oproti zapratanému písaciemu stolu a rozmýšľal, čo ďalej so svojím životom. Neúspešne sa o to pokúšal posledných 5 rokov. Kedysi slávny a uznávaný vedec Dr. Haselnuss, dnes už len beznádejná troska s veveričkou v tmavej pivnici s večne pokazenou žiarovkou, ktorú sa ani neunúval vymeniť. Už dlhšie sa pohrával s myšlienkou začať odznova.

Rozhodol sa vyhodit' všetky haraburdy, ktoré mu pripomínali jeho neúspech a nikdy nefungovali tak, ako mali. A to aj spravil. Nasadol na bicykel, pripevnil si k nemu zhrdzavený vozík plný všetkých vecí, ktorých sa chcel zbaviť, a vydal sa na šrotovisko. Keď dorazil, bicykel si oprel o vysoký železný plot, vybral veci z vozíka a pobral sa smerom k obrovským kopám kovového odpadu. Postupne vyhadzoval jeden nepodarený výtvar za druhým a snažil sa potlačiť smútok, ktorý sa každým krokom zväčšoval. Vtom niečo zbadal. Niečo zvláštne. Zvedavosť ho poháňala vpred, až kým nestál priamo pred ním.

...

Andy sa skleslo prechádzal pomedzi vraky kedysi fungujúcich vecí. Vedel, že jeho osud je rovnaký, a už ho prijal. No niečo ho zastavilo. Vysoký, nie veľmi sympaticky vyzerajúci pán mu blokoval cestu. Zrazu sa nebezpečne začal blížiiť. Vzápätii cítil, že prestáva fungovať, a čip poháňajúci jeho konštrukciu sa ocitol vo vrecku neznámeho.

...

V pivnici blikalo svetlo. Zúfalstvo v miestnosti bolo cítiť viac ako predtým. „Vyzeráš veľmi schopne, no ešte si ťa musím otestovať,“ Andy začul akýsi hlas vychádzajúci z tmy. Z nej vyšiel už známy Dr. Haselnuss. Podával mu akýsi hárok papiera a zákerne sa usmial. „Hra sa môže začať.“

#### Úloha 4

Máme tabuľku s výrezom v tvare obráteného Z (obrázok), ktorá má túto vlastnosť: keď zakrúžkujeme ľubovoľných päť čísel tak, že v každom stĺpci aj v každom riadku je zakrúžkované práve jedno, a sčítame ich, vždy dostaneme rovnaký súčet. Doplňte čísla na prázdne (biele) miesta. Nájdiť všetky riešenia.

0				4
			3	2
				9
		8	5	
6			7	

Andymu taká ľahká úloha, samozrejme, nerobila ťiaden problém a zvládol to za krátky čas. „Vidím, ťe s tebou sa mi bude pracovať dobre,“ konštatoval Dr. Haselnuss. Ďalej pokračoval: „keďťe odteraz so mnou prakticky bývaš, mal by si si pozrieť okolie.“ Andy sa pobral za doktorom. Prišli k veľkým kovovým dverám, ktoré sa po hlasnom buchnutí pod váhou tela doktora otvorili. Zrazu ho zaslepili ostré ľúce slnka, ktoré ho po náhlej zmene prostredia zaskočili. Výhľad, ktorý naňho čakal, bol príjemne prekvapivý. Stál na veľkej preskľenej terase a hľadel na krásne ligotavé more a malé ostrovčeky črtajúce sa v dialke. Rozmýšľal, ako ďaleko sa môže nachádzať od šrotoviska, odkiaľ ho doktor uniesol. Prišli loďou? Alebo lietadlom? Vtom si všimol dlhé mosty spájajúce ostrovčeky. No z ostrova, na ktorom boli, nevedel ťiaden most. A vtedy sa Andy zamyslel.

### Úloha 5

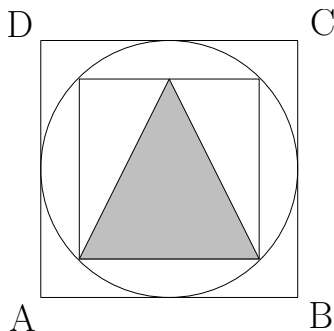
*Niekoľko ostrovov je pospájaných mostami, pričom medzi dvomi ostrovmi vedie najviac jeden most. Navyše, z rôznych ostrovov vychádza rôzny počet mostov (ak z nejakého ostrova vychádza jeden most, z ostatných ostrovov musí vychádzať 0 mostov alebo aspoň 2 mosty). Dokážte, ťe bez ohľadu na to, ako sú ostrovy poprepájané, tak nie je možné splniť dané podmienky.*

- Riešte pre prípad, ťe ostrovov je 7.
- Riešte pre prípad, ťe ostrovov je viac ako 7 – nájdite všeobecné riešenie pre všetky také počty.

„Keďťe už trochu poznáš okolie, môžem ti ukázať miesto kde budeš, mať najlepšľ výhľad,“ navrhol doktor. Andy nevedel, kde je, ani, čo bude ďalej, ale bol rád, ťe sa k nemu doktor správal priateľsky. Nasledoval ho po točitom schodisku na strechu budovy, kde na zemi zbadal čiary usporiadané do geometrických útvarov. Doktor mu to hneď objasnil: „Sám si prišiel na to, ťe na ostrov nevedú ťiadne mosty. Jediný spôsob, akým sa tu dá dostať, je helikoptérou, ktorá má heliport práve na tejto streche“.

**Úloha 6**

Strecha má tvar štvorca  $ABCD$ . Heliport je v tvare sivého trojuholníka. Akú časť plochy strechy tvorí heliport? Úlohu riešte bez použitia rysovacích pomôcok a merania vzdialeností.



„O chvíľu mi ty a tvoje n-čatá pomôžete ovládnuť svet!!!“ zašepkal si doktor popod fúz.

Alex už strácal nádej. Celý dom prehladal trikrát, no nikde robota nenašiel. Alexove obavy sa potvrdili. Mohlo to znamenať len jediné. Andy ušiel a momentálne naňho vonku mohlo číhať nebezpečenstvo. Alebo predstavoval Andy nebezpečenstvo pre ostatných?

## Zadania 2. série úloh zimného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do 19. novembra 2018

### Robotická hrozba

V minulosti úspešný vedec Dr. Haselnuss predstavuje obrovskú hrozbu pre nás všetkých. Tento šialenec sa pokúša pomocou novovyvinutého stroja na klonovanie vytvoriť si obrovskú armádu robotov, ktorí mu majú pomôcť ovládnuť svet a podmaniť si všetkých. Ak ho nezastavíme včas, môže to viesť k najväčšej katastrofe v histórii ľudstva.



Úryvok z magazínu Mínius 8 týždňov, 27.08.2018

Táto správa bleskovou rýchlosťou obletela celý svet. Dr. Haselnuss sa zo dňa na deň stal najznámejším a najobávanejším vedcom dnešnej doby. Správa sa pochopteľne dostala aj k Alexovi. Nakoľko je Alex nesmierne inteligentný, hneď si spojil súvislosti a došlo mu, že Andyho útek neovplyvňoval len jeho, ale všetkých ľudí na svete. Snažil sa zistiť čím viac informácií o momentálnej situácii, takže celé hodiny trávil sledovaním správ. Pováčšine nenašiel nič zaujímavé, kým nenarazil na jednu konkrétnu reportáž. Nachádzali sa v nej zábery odhaľujúce veľkosť jeho armády na ovládnutie sveta.

### Úloha 1

Štyri roboty sa nachádzajú na priamke a predstavujú body  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  a  $S$  v nejakom poradí. Vieme, že dĺžky úsečiek  $|PQ|$ ,  $|QR|$ ,  $|RS|$  a  $|SP|$  sú jednotlivo 13, 11, 14 a 12. Aké je poradie bodov na priamke a aká je vzdialenosť medzi bodmi, ktoré sú od seba najvzdialenejšie? Nezabudnite nájsť všetky možnosti.

V tom okamihu vedel, že musí rýchlo konať. Uvedomil si, že všetky doterajšie udalosti pramenili z hádky s mamou a jeho nedbalosti, keď zabudol kus papiera na stole, a to mohlo teraz spôsobiť globálnu katastrofu. Cítil sa vinný a musel to napraviť. Takýto problém môže vyriešiť len jedna vec. Stroj času. Vtom si spomenul na článok z nedôveryhodnej internetovej stránky o lese, v ktorom sa údajne nachádza vec potrebná na záchranu. Vela možností mu už neostávalo, a tak sa to rozhodol nájsť stoj čo stoj. Jediný problém bol v tom, že nevedel, aký je les veľký, a, kde sa časostroj nachádza.

### Úloha 2

Les má podobu štvorcovej tabuľky o rozmeroch  $n \times n$ , ktorá je vyplnená všetkými číslami od 1 po  $n \cdot n$  tak, že čísla v každom riadku, každom stĺpci a aj na oboch hlavných uhlopriečkach majú rôzne súčty. Aká najmenšia tabuľka sa dá zostrojiť? Prečo sa menšia už zostrojiť nedá? (Ak ste sa s tým ešte nestretli, tak  $n$  označuje

nejaké neznáme číslo. Ak by bolo napr.  $n = 4$ , tak ide o tabuľku so 4 riadkami a 4 stĺpcami, kde nájdeme čísla od 1 do  $4 \cdot 4$ , teda do 16.)

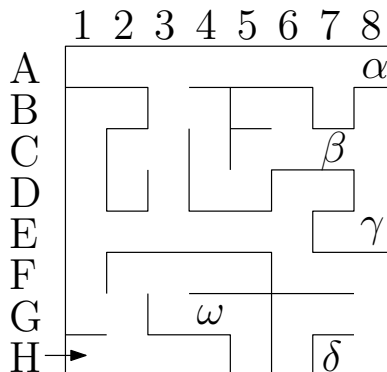
Po hodinách predierania sa hustým krovím víťazoslávne objavil to, čo hľadal. Držal sa motta „kto hľadá, ten nájde“. V húštinách sa nachádza bludisko, v ktorom sú umiestnené portály na rôzne účely. Bol celkom stratený, a tak sa potešil, keď stretol piatich strážcov bludiska, z ktorých nie všetci boli dôveryhodní a niektorí mu klamali.

### Úloha 3

V obávanom bludisku sa nachádza portál pod jedným z polí  $\alpha$  (alfa),  $\beta$  (beta),  $\gamma$  (gama),  $\delta$  (delta),  $\omega$  (omega). Každé pole sa nachádza na inom mieste (viď obrázok). Len pod jedným poľom sa nachádza portál a môžeme sa dostať len pod jedno zvolené pole. V okolí obávaného bludiska sa pohybovalo 5 strážcov, každý o portáli tvrdil niečo iné. Postupne títo piati ľudia povedali:

1. Na najkratšej ceste za portálom sa musíš aspoň štyrikrát otočiť doprava.
2. Portál sa nachádza v riadku označenom písmenom zapisujúcim spoluhlásku.
3. Na najkratšej ceste za portálom musíš prejsť aspoň cez 15 políčok.
4. Portál sa nachádza na políčku, ktoré je v stĺpci označenom párnym číslom.
5. Na najkratšej ceste za portálom sa musíš aspoň štyrikrát otočiť dolava.

Niektorí z nich však nehovorili pravdu. Ak by sme však vedeli, koľko z nich klamalo, dokázali by sme jednoznačne určiť, pod ktorým poľom sa portál nachádza. Pod ktorým? Do bludiska vchádzame otočení tým smerom, ktorým sme prišli. Na každom políčku sa vieme otočiť najviac jedenkrát, pričom otáčaním doprava resp. dolava myslíme otočenie o práve jednu štvrtinu kružnice.



Zatiaľ čo sa Alex snažil zvrátiť zlý vývoj prítomnosti, v sídle Dr. Haselnussa sa konali kruté zápasy medzi robotmi za účelom selekcie slabších kusov, pri ktorých nastala chyba pri klonovaní. Súboje prebiehali nasledovne.

#### Úloha 4

Hráč A a Hráč B majú na papieri napísaných 100 jednotiek oddelených medzerami. Hráč A začína a s Hráčom B sa ťah po ťahu striedajú. Každý hráč musí v každom ťahu umiestniť medzi nejaké dve susedné jednotky znamienko plus alebo znamienko krát. Po vyplnení všetkých medzier ostane na papieri príklad, ktorého výsledok je buď párnny, alebo nepárny. Ak je párnny, vyhráva Hráč A, ak je nepárny, vyhráva Hráč B. Jeden z hráčov dokáže hrať tak, aby vždy vyhral, a to bez ohľadu na súperove ťahy. Ktorý z hráčov to je a prečo?

Alex sa zrazu ocitol na mieste, ktoré nikdy pred tým nevidel. Poobzeral sa okolo seba a bol veľmi zmätený. Všade naokolo boli farebné balóny, stužky, trblietavé konfety. Zacítil vôňu koláčov, najmä čokoládovej torty. Počul prenikavý krik detí a celé miesto pôsobilo veľmi rušným dojmom. Všetko navôkol naznačovalo, že práve prebieha detská narodeninová oslava. V strede miestnosti sa nachádzal veľký kruhový stôl, na ktorom boli položené menovky. V momente, keď si ho všimol, si k nemu začali sadáť ľudia.

#### Úloha 5

Okolo okrúhleho stola je v pravidelných rozstupoch rozostavených pätnásť stoličiek. Na stole sú kartičky s menami pätnástich hostí. Hostia si všimli kartičky až keď si už sadli. A tak sa stalo, že nikto z pätnástich hostí nesedel pred svojou vlastnou kartičkou. Dokážte, že je možné otočiť stôl tak, aby aspoň dvaja hostia sedeli na správnych miestach.

### *Edukačné okienko*

V tomto ročníku Malynáru predstavujeme novinku – okienka, v ktorých vás na niekoľkých riešených príkladoch zoznámime so zložitejšími, no užitočnými úvahami. Cieľom tohto okienka je naučiť vás niečo nové. Niečo, čo vás v škole buď nenaučia vôbec, alebo naučia až vo vyšších ročníkoch, aj napriek tomu, že to viete hravo zvládnuť už teraz. Veríme, že vám okienko rozšíri matematický rozhľad a pomôže vám aj v riešení šiestej úlohy druhej série.

Predstavte si situáciu, v ktorej sa balíte na sústreďenie Malynáru. Skriňu máte plnú tričiek, no zbaliť si chcete len zopár. Ešte neviete, v akom poradí ich budete nosiť, a tiež vám je jedno, v akom poradí ich dáte do tašky. Jednoducho si chcete vybrať nejakú skupinu tričiek a zbaliť ich. Koľkými spôsobmi to však viete vykonať?

**Návodová úloha 1.** V skrini máme sedem rôznych tričiek. Kolkými rôznymi spôsobmi z nich vieme zvoliť trojicu tričiek? Na poradí tričiek v trojici nám nezáleží. Odporúčame vám skúsiť si najprv úlohu vyriešiť samostatne a až potom si prečítať jej riešenie.

**Riešenie návodovej úlohy 1.** Hoci nám na **konečnom** poradí tričiek nezáleží, jedno tričko zo skrine vyberieme predsa len ako prvé – toto tričko vieme zvoliť siedmimi spôsobmi, pretože tričiek v skrini je na začiatku práve sedem. Druhé tričko, ktoré vyberieme, volíme zo zvyšku, čiže zo šiestich tričiek. Prvú dvojicu tričiek teda vieme vybrať  $7 \cdot 6 = 42$  rôznymi spôsobmi. Prečo sme medzi sedmičku a šesťku vložili krát? Pretože šesť možností výberu druhého trička máme **pre každé** zo siedmich tričiek prvého výberu. Pozrime sa na tretie tričko, ktoré volíme zo zvyšných piatich v skrini. Už asi tušíte, že trojicu tričiek s ohľadom na poradie vieme vybrať  $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$  spôsobmi. Dôvod je opäť rovnaký – päť možností výberu tretieho trička existuje **pre každú** zo štyridsiatich dvoch dvojíc a možností je preto  $7 \cdot 6 \cdot 5 = 42 \cdot 5 = 210$ . To však stále nie je výsledok! V zadaní totiž stojí, že na poradí tričiek nám nezáleží. V našich 210 možnostiach ale na poradí záležalo. Ak by sme, napríklad, mali v skrini zelené, modré a červené tričko, poradia vyberania tričiek (1. zelené, 2. červené, 3. modré) a (1. červené, 2. zelené, 3. modré) sú v 210 možnostiach započítané ako dve rôzne možnosti, hoci predstavujú tú istú trojicu farieb. Každá trojica tričiek je teda medzi možnosťami započítaná viackrát – raz za každé poradie, čo sa v trojici dá vytvoriť. V tomto kroku riešenia preto musíme spočítat, kolkými spôsobmi vieme **zoradiť** tri rôzne predmety v trojici. Na prvom mieste poradia môže stáť ľubovoľný z troch predmetov a pre každý z nich na druhom mieste dva predmety. Na tretie miesto nám ostáva zvyšný člen trojice – pre každú z dvojíc predmetov na prvých dvoch miestach tak máme len jednu možnosť pre tretí predmet. Rovnakou myšlienkou ako pri výbere tričiek tak zistíme, že tri predmety vieme zoradiť  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  spôsobmi. Ostáva si uvedomiť, že všetkých šesť rôznych poradí pre každú trojicu máme započítaných v našich 210 spôsoboch. Ak sa pýtame len na počet trojíc a nie počet zoradených trojíc, bude ich len  $210 : 6 = 35$ , čo je nami hľadaný výsledok.

Z úlohy vám je zrejme jasné, že tento spôsob je univerzálny a dá sa použiť na každý príklad, kde vyberáme nejaké predmety zo širšej ponuky a nezaujímá nás ich poradie. Výhodou nášho postupu je to, že nemusíme vypisovať všetky možnosti, čo môže byť pri vysokých počtoch možností nepríjemné.

Ak by sme sa pýtali napríklad, kolkými spôsobmi vieme vybrať nejakú štvoricu guľôčok z vrečka s deviatimi guľôčkami, keď nám na poradí nezáleží, postup by bol podobný:

Najprv sa zamyslíme, koľko by bolo možností výberu štvorice, keby nám na poradí guľôčok záležalo –  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ . Teraz sa zamyslíme, koľkými spôsobmi sa dajú zoradiť štyri guľôčky –  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ . Nakoniec si uvedomíme, že každá nezoradená štvorica guľôčok je medzi 3024 možnosťami započítaná práve raz za každý spôsob jej zoradenia. Štvoric preto existuje  $3024 : 24 = 126$ . Takýto počet možností by sa nám vypisoval len veľmi ťažko.

Hľadanie počtu kombinácií je kľúčové aj pre ďalšiu úlohu, aj keď to na prvý pohľad možno tak nevyzerá.

**Návodová úloha 2.** Heslo od počítača je štvorciferné číslo tvaru  $\overline{ABCD}$ . O hesle vieme, že pre súčet jeho cifier platí  $A + B + C + D = 6$  a cifra nemôže byť nula. Koľko rôznych hesiel vyhovuje podmienkam? Odporúčame vám skúsiť si najprv úlohu vyriešiť samostatne a až potom si prečítať jej riešenie.

**Riešenie návodovej úlohy 2.** Ukážeme si užitočný a silný spôsob, ako sa dá k úlohe pristupovať. Nakreslíme si do riadku 6 hviezdíčiek – tie predstavujú súčet cifier. Teraz si zvolíme tri **rôzne** medzery medzi hviezdíčkami a umiestnime do nich prepážku. Čo sme práve dostali, je jedno z hľadaných hesiel, akurát v ňom máme hviezdíčky namiesto cifier. Počet hviezdíčiek, ktoré oddeľujú dve po sebe idúce prepážky, prípadne kraje radu hviezdíčiek, predstavujú číslicu hesla. Napríklad umiestnenie prepážok **★★|★|★|★★** zodpovedá heslu 2112. Uvedomme si dve veci:

1. Každé vyhovujúce heslo sa dá nejakým spôsobom vytvoriť vložením prepážok medzi hviezdíčky.
2. Každá voľba troch rôznych medzier na priehradky vedie k nejakému heslu. Súčet cifier bude vždy 6, lebo to je nemenný počet hviezdíčiek, a medzi ciframi nebude nula – na to, aby sa vyskytla v hesle nula, by sme museli vložiť dve prepážky do jednej medzery, čo sme si však zakázali tým, že vyberáme tri **rôzne** medzery.

Zvyšok úlohy je už jednoduchý. Vieme, že počet vyhovujúcich hesiel je rovný počtu rôznych trojíc medzier, do ktorých vieme vložiť prepážku. Je nám pri tom zrejmé, že na poradí vkladania prepážok nezáleží – ide len o výsledné umiestnenie. Medzi šiestimi hviezdíčkami je medzier päť – ostáva nám teda zrátať, koľkými spôsobmi vieme zvoliť trojicu medzier z piatich. To sme sa ale naučili v prvej návodovej úlohe – hľadaný počet je  $(5 \cdot 4 \cdot 3) : (3 \cdot 2 \cdot 1) = 10$ . Vyhovujúcich hesiel existuje 10. K podobnému riešeniu **nie je** potrebné dané možnosti vypisovať, my ich však aj tak uvádzame, no je to len pre lepšiu názornosť.



★★★ ★ ★ ★	3111	★★ ★ ★★ ★	2121
★ ★★★★ ★ ★	1311	★★ ★ ★ ★★	2112
★ ★ ★★★★ ★	1131	★ ★★ ★ ★★	1212
★ ★ ★ ★★★★	1113	★ ★★ ★★ ★	1221
★★ ★★ ★ ★	2211	★ ★ ★★ ★★	1122

Pre záujemcov, ktorí by chceli vedieť ešte viac, uvedieme aj to, že táto metóda počítania sa nazýva „Bars & Stars“, čo sa z angličtiny dá preložiť ako „prepážky a hviezdičky“. Veríme, že svoje nové vedomosti poľahky uplatníte v poslednej úlohe.

Potreboval sa čo najrýchlejšie dostať z oslavy, vydať sa hľadať svojho robotického priateľa a v konečnom dôsledku zachrániť svet. Oslava bola v plnom prúde. Rozhliadol sa po miestnosti a uvidel dievča približne v jeho veku. Pôsobila sympaticky a hneď spozorovala, že je akýsi zmätený. Prihovorila sa mu, z jeho úst však nevychádzali slová, ale akési čudesné zhluky písmen, ktoré sa na ľudskú reč vôbec nepodobali.

### Úloha 6

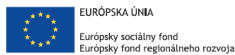
*Kolko rôznych sedempísmenových „slov“ vieme vytvoriť z písmen A, B, C, D? „Slovo“ je ľubovoľný zhluk abecedne zoradených písmen – napríklad AAAABBD je „slovo“ ale AACCBDA nie je. „Slová“ sú rovnaké len vtedy, ak sa zhodujú písmená na všetkých ich pozíciách. V „slove“ nemusíme použiť každé zo štyroch písmen.*

Po chvíli tento hendikep spôsobený cestovaním v čase zmizol a Alex sa bez problémov opýtal Adriany, ako sa čo najrýchlejšie dostane von. Rátal s tým, že Adriana pozná príbeh strateného robota, boli toho predsa plné noviny. Neuvedomil si, že súčasnosť je minulosť a papierik s kódom stále leží na stole, robot pokojne čaká v izbe na Alexa, Dr. Haselnuss znudene dumá nad svojím životom v pivnici a svet sa ani náhodou nerúti do záhuby. Jeho novú kamarátku dôležitá úloha zachrániť ľudstvo nadchla a s radosťou sa podujala na pomoc. Spoločne sa náhlili k dverám, vykročili v ústrety dobrodružstvu a vydali sa na strastiplnú cestu zachrániť svet pred robotickou inváziou. Ak sa im to nepodarí, budúcnosť bude ešte horšia, ako mala pôvodne byť...



- Názov:** MALYNÁR – korešpondenčný matematický seminár  
Číslo 1 • September 2018 • Zimný semester 28. ročníka
- Internet:** [malynar.strom.sk](http://malynar.strom.sk)
- E-mail:** [malynar@strom.sk](mailto:malynar@strom.sk)
- Organizátor:** Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,  
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice  
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

*Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.*



Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

[www.minedu.sk](http://www.minedu.sk) [www.employment.gov.sk/sk/esf/](http://www.employment.gov.sk/sk/esf/) [www.itakademia.sk](http://www.itakademia.sk)