MALYNÁR

Číslo 2 — Ročník 29 — malynar.strom.sk

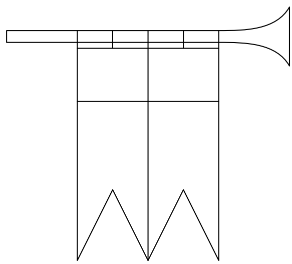
Ahojte!

Určite ste si všimli, že dni sú stále kratšie a chladnejšie a vám nič iné nezostáva, len tvrdnúť doma. Našťastie sa nudiť nebudete, lebo pre vás máme druhú a zároveň poslednú sériu tohto semestra. Po nej tých najlepších z vás pozveme na naše sústredenie, kde vás čaká kopa super ľudí a vedúci, ktorí pre vás pripravujú skvelý program. Tak šup šup, uvarte si čajík, zoberte perá (a pravítka) a hybaj počítať!

Vaši milovaní vedúci MALVNÁRa

Ako bude

Výlet



Hŕba ihličia pod oknom prestáva narastať a začína hniť. Košatá jeseň je v plnom prúde a blíži sa čas ísť na výlet, kde budeš mať šancu stretnúť sa s kamarátmi, nevidenými od dávneho času niekde na sústredení, alebo s takými, s ktorými sa ešte iba, ak sa podarí, uvidíš. Či už s nami skúsenosti máš, či nie, dobrý nápad bol pozrieť sa na rub listu obálky, tak neváhaj a príď na výlet v priebehu pomikulášskeho víkendu (7. a 8. 12.). Čas a miesto konania ešte upresníme, preto sleduj našu webovú stránku, neprehliadni, keď sa objaví nový príspevok, a v príslušné ráno tas korene a prejdi sa s nami na čerstvom vzduchu. Tiež zavolaj aj akýchkoľvek kamarátov, čo máš, na výlete je dosť miesta pre všetkých a ani, ak sme vás ešte nevideli, si z vás nebudeme strieľať – nie ste luk z vetvičiek. Možno navštívime nejaký drevený hrad.

Nadšení vedúci

Vzorové riešenia 1. série úloh zimného semestra

1

opravovali **Róbert Sabovčík** a **Klára Hricová**

najkrajšie riešenie: Stanislav Beneš

117 riešení

Zadanie

Na zámku bola tabuľka 5×5. Časť tabuľky bola už vopred vyplnená (obr. 2). Tárajko musí doplniť tabuľku tak, aby v každom bielom políčku bol súčin príslušných čísel z dvoch sivých záhlaví v riadku a stĺpci (ako na obr. 1). V sivých políčkach môžu byť iba prirodzené čísla. Pomôžte Tárajkovi nájsť všetky možné riešenia a zdôvodnite, že to inak nejde.

		b		
a		$a \cdot b$		

	6	3		
		12		
		9	72	
			56	49

Riešenie

Označme si sivé políčka ako $a_1 - a_4$ a $b_1 - b_4$(zhora dole a zľava doprava ako v náčrte pri úlohe). Vieme, že čísla v sivých políčkach musia deliť čísla v bielych políčkach v danom riadku a stĺpci. Tu máme viacero možností, od ktorého čísla začať, no všetky nás dovedú k rovnakému riešeniu. Začnime preto číslom 49 v pravom dolnom rohu tabuľky. Číslo 49 je výsledkom násobenia pre $a_4 = 1$ a $b_4 = 49$ alebo $a_4 = 49$ a $b_4 = 1$ alebo $a_4 = 7$ a $b_4 = 7$ (keďže delitele čísla 49 sú 1, 7, 49 a chceme brať do úvahy všetky možnosti).

Ak $a_4 = 1$ a $b_4 = 49$:

Číslo 56 je súčinom a_4 a b_3, a keďže $a_4 = 1$, preto $b_3 = 56 : 1 = 56$. Vieme ďalej, že 72 je súčin a_3 a b_3 (ktoré je 56), musí byť preto deliteľné 56, čo však nie je, teda táto možnosť nám nedáva riešenie. Poďme sa pozrieť na ďalšie možnosti.

Ak $a_4 = 49$ a $b_4 = 1$:
Číslo 56 je súčinom $a_4 = 49$ a b_3, avšak 49 nie je deliteľom 56, preto b_3 nemôže byť prirodzené číslo, a teda táto možnosť opäť nie je riešením.
Ak $a_4 = 7$ a $b_4 = 7$:
Vieme, že 56 je súčin $a_4 = 7$ a b_3. Vieme preto, že $b_3 = 56 : 7 = 8$. Ďalej 72 je súčin a_3 a $b_3 = 8$, teda $a_3 = 72 : 8 = 9$. Na základe toho doplníme aj b_2, keďže vieme, že 9 je súčin $a_3 = 9$ a b_2, tým pádom $b_2 = 9 : 9 = 1$. Keďže $b_2 = 1$ a $a_2 = 12 : b_2$, tak vieme, že $a_2 = 12$. Podobne vieme aj to, že $a_1 = 3 : b_2$, teda, že $a_1 = 3$. Už nám zostáva doplniť len b_1. Vieme, že 6 je súčin čísel $a_1 = 3$ a b_1, preto $b_1 = 6 : 3 = 2$.
Podarilo sa nám nájsť všetky čísla v sivých políčkach. Môžeme teda doplniť čísla v bielych jednoduchým násobením. $2 \cdot 12 = 24$, $2 \cdot 9 = 18$, $2 \cdot 7 = 14$ a podobne. Takýmto postupom vyplníme všetky biele políčka ako môžete vidieť na obrázku. Tým si overíme aj správnosť vyplnenia sivých políčok.

		b_1	b_2	b_3	b_4
		2	1	8	7
a_1	3	6	3	24	21
a_2	12	24	12	96	84
a_3	9	18	9	72	63
a_4	7	14	7	56	49

V tomto riešení sme prešli všetky možností, a práve preto vieme, že naše riešenie je jediné správne, čo je taktiež veľmi dôležitá súčasť postupu. Mohli sme pokojne začať aj s iným číslom ako 49. Vtedy by sa nám zmenilo poradie rozoberania všetkých možností, avšak keby sme ich rozobrali všetky, riešenie by bolo tiež správne.

Komentár

Veľmi nás teší, že sa väčšina z vás dopracovala k správnemu výsledku a veľa z vás nám napísala aj pekný postup, ktorý k riešeniu viedol. Body sme bohužiaľ museli strhávať hlavne za to, že si veľa z vás neoverilo, či je vaše riešenie naozaj to jediné, čo je pri takomto type úloh veľmi dôležité.

2

opravovali **Michal Masrna** a **Benjamín Mravec**
najkrajšie riešenie: Richard Prikler

124 riešení

Zadanie

Tárajko vedel, že sitko je drahé, a teda jeho cena je dvojciferné číslo. Opýtal sa na ňu štyroch predavačov a tí mu povedali toto:

- Adam: „Jedna z cifier je dvakrát väčšia ako druhá."
- Branči: „Cena je deliteľná šiestimi."
- Cyril: „Keby sme k cene prirátali 3, bola by deliteľná piatimi."
- Drahoslav: „Cena je menšia ako 20."

Tárajko vie, že práve jeden z nich klame. Určte správnu cenu a dokážte, že je jediná správna.

Riešenie

Postupne sa pozrieme na to, ako by to vyzeralo, keby klamali jednotliví predavači.

1. Ak by klamal Adam, museli by zvyšní traja predavači hovoriť pravdu. Cena by teda musela byť deliteľná číslom 6, menšia ako 20 a po pripočítaní čísla 3 by mala byť výsledná hodnota deliteľná 5. Navyše zo zadania vyplýva, že cena musí byť dvojciferné číslo. Jediné dve dvojciferné čísla menšie ako 20 a zároveň deliteľné 6 sú 12 a 18. Ešte nám treba overiť, či po pripočítaní 3 je výsledok deliteľný 5:

   $12 + 3 = 15 \rightarrow 15$ je deliteľné 5,

   $18 + 3 = 21 \rightarrow 21$ nie je deliteľné 5.

   V tomto prípade (ak by klamal Adam) je jediná možná cena 12. Avšak 2 je dvakrát viac ako 1, čo nesedí s tým, že Adam má klamať. Adam teda klamať nemohol.

2. Ak by klamal Branči, bolo by cenou dvojciferné číslo menšie ako 20 a jedna z cifier by bola dvakrát väčšia ako druhá. Keďže všetky takéto čísla sa určite začínajú cifrou 1, na druhom mieste musí byť cifra 2, lebo 2 je dvakrát väčšie ako 1. Cena by teda bola 12. Po prirátaní čísla 3 je výsledok $12 + 3 = 15$, čo je deliteľné 5. To sedí aj s Cyrilovým výrokom, ktorý hovorí pravdu.

   Jediná možná cena (ak by klamal Branči) je 12. Branči tvrdí, že je cena deliteľná číslom 6, ale keby klamal, cena by nemohla byť deliteľná číslom 6. Ani Branči preto neklame.

3. Ak by klamal Cyril, cena je opäť dvojciferné číslo, menšie ako 20 a deliteľné číslom 6. To nás znovu obmedzuje len na 2 možnosti, a to 12 a 18. Ale iba pre číslo 12 platí, že jedna jeho cifra je dvakrát väčšia ako druhá.

   Jediná možná cena (ak by klamal Cyril) je znovu 12. To však nesedí s tým, že by mal Cyril klamať, keďže $12 + 3 = 15$, čo je deliteľné číslom 5. Tým, že Cyril klame, cena nemôže byť deliteľná číslom 5.

4. Poslednou možnosťou je to, že by klamal Drahoslav. Vtedy má byť jedna cifra dvakrát väčšia ako druhá, cena má byť deliteľná 6 a po prirátaní 3 má byť deliteľná 5. Keďže Drahoslav klame, cena musí byť dvojciferné číslo, ktoré je aspoň 20 (lebo tvrdí, že cena musí byť menšia ako 20). Najprv si vypíšeme všetky dvojciferné čísla väčšie ako 19 a zároveň deliteľné číslom 6:

   24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96.

   Teraz vypíšeme z nich len tie, kde je nejaká z cifier dvakrát väčšia ako druhá:

   24, 36, 42, 48, 84.

   A ako posledný krok prirátame ku každému číslo 3 a pozrieme sa na to, či je výsledok deliteľný číslom 5:

   $24 + 3 = 27 \to 27$ nie je deliteľné 5,

   $36 + 3 = 39 \to 39$ nie je deliteľné 5,

   $42 + 3 = 45 \to 45$ je deliteľné 5,

   $48 + 3 = 51 \to 51$ nie je deliteľné 5,

   $84 + 3 = 87 \to 87$ nie je deliteľné 5.

   Jediná možná cena sitka pre prípad, že klame Drahoslav, je 42.

Je to jediná správna cena, pretože ak by klamal nejaký iný predavač ako Drahoslav, ako sme si vyššie ukázali, tvrdenia zvyšných predavačov by si navzájom odporovali. Cena sitka je 42.

Komentár

Väčšina z vás začala správne postupne skúmať, ako by to vyzeralo, keby klamali jednotliví predavači. Veľa z vás však dospelo k zlému výsledku, pretože ste zabudli, že číslo, ktoré vám vyjde z troch pravdivých výrokov, ešte je potrebné porovnať s tým, že štvrtý predavač má klamať. Nestačí len ukázať, že 42 je riešenie, ale aj že žiadne ďalšie riešenia neexistujú.

3

opravovali **Kristín Mišlanová** a **Gabča Genčiová**
najkrajšie riešenie: Matúš Vresiloč

79 riešení

Zadanie

Starček priniesol tabuľku s napísanými číslami 1, 2, 3, ..., 100. V každom kole zmazal dve z čísel a napísal namiesto nich ich súčet. Po čase v tabuľke ostalo päť po sebe idúcich čísel. Ktoré to boli? Svoje riešenie zdôvodnite.

Riešenie

Najprv si musíme uvedomiť, že keď sčítame nejaké čísla v akomkoľvek poradí, ich súčet bude vždy rovnaký. Takže ak namiesto dvoch čísel na tabuli, ktoré zmažeme, napíšeme ich súčet, tak sa celkový súčet čísel na tabuli nezmení. To znamená, že aj súčet piatich čísel, ktoré hľadáme, bude rovnaký ako súčet čísel na začiatku – od 1 do 100.
Súčet čísel od 1 po 100 vieme vypočítať tak, že si zoberieme zo začiatku a konca radu prvé čísla, v tomto prípade 1 a 100, a sčítame ich: $1 + 100 = 101$. Následne si zoberieme druhé číslo zo začiatku a konca radu, čo je 2 a 99, ktorých súčet je $2 + 99 = 101$. Vidíme, že súčet je rovnaký, a to preto, že vždy číslo na začiatku radu sa zväčší o 1 a na konci radu sa zmenší o 1, a kvôli tomu sa súčet nemení. Takýchto dvojíc budeme mať dokopy $100 : 2 = 50$. Takže súčet všetkých čísel od 1 do 100 bude $101 \cdot 50 = 5050$.
Teraz potrebujeme nájsť tých 5 za sebou idúcich čísel, pričom vieme, že ich súčet je 5050. Najprv si predstavme, že rozdelíme 5050 na 5 rovnakých častí: $5050 : 5 = 1010$. Potom platí, že prostredné hľadané číslo bude 1010 a zvyšné 1010tky môžeme upraviť tak, že z dvoch odoberieme 1, resp. 2, a pridáme to k zostávajúcim dvom častiam, aby sme vytvorili päť po sebe idúcich čísel. Tu môžeme pekne vidieť, ako to funguje: $5050 = 1010 + 1010 + 1010 + 1010 + 1010 = (1010 - 2) + (1010 - 1) + 1010 + (1010 + 1) + (1010 + 2) = 1008 + 1009 + 1010 + 1011 + 1012$.
Keď vezmeme akýchkoľvek 5 iných za sebou idúcich čísel, tak ich súčet bude určite menší alebo väčší, a teda hľadané čísla sú 1008, 1009, 1010, 1011 a 1012.

Komentár

K správnemu riešeniu sa dopracovala väčšina z vás. V tejto úlohe bolo podstatné si uvedomiť, že súčet hľadaných čísel a súčet čísel od 1 do 100 je rovnaký. To ste zvládli takmer všetci. Týmto by sme chceli pochváliť riešiteľov, ktorí prišli na pekný spôsob a odôvodnili, ako zrátať po sebe idúce čísla. Niektorým z vás sme však museli strhnúť body, ak ste následne už iba vypísali hľadané čísla a nezdôvodnili, prečo to sú práve tieto čísla. Potom tu bola ďalšia skupina riešiteľov, ktorí náhodne skúšali sčítavať čísla a nejako sa dopracovali k výsledku. Avšak ak by mala úloha viacero riešení, tak by ste sa dopracovali iba k tomu jednému, čo ste našli pomocou skúšania. Preto treba ukázať, že úloha už nemá ďalšie riešenia.

4 opravovali **Paťo Paľovčík** a **Janči Richnavský**

najkrajšie riešenia: Richard Prikler, Stanislav Beneš

103 riešení

Zadanie

Predavač mal štyri čajové vrecúška s viacerými druhmi čajov. V najľahšom je mätový čaj, v najťažšom je harmančekový čaj a zvyšné dve vrecúška majú rovnakú hmotnosť. Má aj rovnoramenné váhy, na ktorých vie vážiť vrecúška. Vrecúška sa vážia tak, že na každé rameno sa dá práve jedno vrecúško a porovná sa ich váha.
Na koľko najmenej vážení vie s určitosťou zistiť, kde je mätový a kde je harmančekový čaj, ak pri každom vážení musí byť na každom ramene váhy práve jedno čajové vrecúško? Zdôvodnite, prečo to na menej vážení nejde, a napíšte, ako ste postupovali.

Riešenie

Je niekoľko postupov, ktorými môže predavač vážiť. Poďme si najprv ukázať postup, ako to vieme spraviť na 3 váženia, a následne si vysvetlíme, prečo nám 2 určite nestačia. Začnime prvým vážením. Môžu nastať tieto situácie:

- Vrecúška sú v rovnováhe. Vieme teda, ktoré dve sú tie dve rovnako ťažké. Z toho vyplýva, že tie dve zvyšné, ktoré sme nevážili, sú harmančekové a mätové. Preto potrebujeme ešte jedno váženie, aby sme určili, ktoré je ktoré. Jedným vážením zvyšných dvoch vidíme, ktoré je mätové (to ľahšie) a ktoré harmančekové (to ťažšie).
- Vrecúška nie sú v rovnováhe. To znamená, že jedno je ľahšie a druhé ťažšie, no viac o nich ešte povedať nevieme. Preto potrebujeme určite ešte aspoň jedno váženie. Jedným zo spôsobov je porovnanie zvyšných dvoch vrecúšok. Opäť môžu nastať dva prípady:
  - Ďalšie dve vrecká sú v rovnováhe. Potom o nich vieme povedať, že to sú tie rovnako ťažké, a tie z prvého váženia tým pádom sú ostávajúce mätové (to ľahšie) a harmančekové (to ťažšie).
  - Aj ďalšie dve vrecká nebudú v rovnováhe. Stalo sa s určitosťou to, že v jednom vážení sa nám stretlo mätové (najľahšie) s jedným z dvojice rovnakých (stredné) a v druhom vážení druhé z dvojice rovnakých (stredné) s harmančekovým (najťažším), no nevieme, v ktorej dvojici sa nachádzajú ktoré vrecúška. Preto musíme vykonať ešte jedno váženie. Vezmime preto z každej dvojice to ľahšie a porovnajme ich. Keďže v jednom vážení bolo to ľahšie určite mätové a v druhom jedno z tých stredných, tak vieme, že v treťom vážení budeme porovnávať práve tieto dve vrecúška. Určite sa nebudú rovnať, a teda po odvážení týchto ľahších z každého váženia vieme s istotou povedať, ktoré je mätové (najľahšie) a ktoré je z dvojice rovnakých (stredné). V tej dvojici, z ktorej pôvodne pochádzalo toto

novo zistené jedno z dvojice rovnakých vrecúšok (stredné), bolo to druhé harmančekové (najťažšie) vrecúško, keďže ho preválžilo.

Pre zvolený postup nám teda stačia 3 váženia na to, aby sme zistili, ktoré vrecúško je mätové a harmančekové. Podobne by to vyzeralo, ak by sme sa rozhodli vziať v poslednom opísanom kroku tie ťažšie a nie tie ľahšie. Keby sme sa rozhodli vziať z jedného váženia ľahšie a z druhého ťažšie, tiež by sme tretím vážením vedeli zistiť, ktoré je ktoré.
Stále sme však neukázali, či sa to nedá náhodou nejakým iným spôsobom na dve váženia. Existuje už len jeden spôsob postupu, a to taký, že by sme po prvom vážení, z ktorého sme dostali nerovnováhu, nevzali obe nové vrecúška, ale nechali tam jedno z prvého váženia a len to druhé zamenili za nové. Ak by sme aj tu dostali rovnakú nerovnováhu (teda by sa stalo to, že to vrecúško, ktoré sme tam nechali sa oproti tomu druhému javí rovnako v oboch váženiach), nevedeli by sme s istotou určiť, ktoré vrecúško je ktoré (napríklad vrecúška, ktoré sa javili ako ťažšie môžu byť obe z tých rovnakých alebo môže byť jedno z nich harmančekové najťažšie). Už sme použili dve váženia, pri čom tie nám nestačili, čiže aj pri tomto spôsobe budeme potrebovať viac, teda aspoň 3.
Ukázali sme teda, že pre nejaký postup to ide na 3 váženia, a ten by sme odporučili predavačovi. Okrem toho sme ukázali, že na menej to nejde aj pre druhý spôsob váženia. Iné postupy váženia neexistujú, a teda ukázali sme to, čo sme chceli.

Komentár

Mnoho z vás sa dostalo k správnemu počtu potrebných vážení, no veľká väčšina z tejto skupiny riešiteľov nám neukázala to, že je to minimum pre všetky spôsoby, ktoré predavač môže použiť. Za to sme museli stiahnuť body, nakoľko je veľmi dôležité pri akejkoľvek úlohe podobného typu dokázať, že vami nájdený výsledok platí pre všetky prípady. Ak ste to neukázali, potom je vaše riešenie nekompletné a my ho žiaľ nemôžeme ohodnotiť plným počtom bodov. Potom tu bola ďalšia kategória riešiteľov, ktorá sa rozhodla ukázať to len na jednom konkrétnom prípade, čo tiež nie je správne, keďže potrebujeme poňať všetky varianty, ku ktorým sa môžeme dostať.

5 opravovali **Mimi Hanus** a **Maťo Gbúr**

najkrajšie riešenie: Tomáš Lang

100 riešení

Zadanie

Pred zámkom boli tri jazierka. Do prvého sa zmestí 96 žubrienok, do druhého 104 a do tretieho 144. Každú noc sa v jazierku rozdelí každá žubrienka na dve. Ak je žubrienok veľa a nemôžu sa rozdeliť všetky, nerozdelí sa ani jedna. Tárajko má k dispozícii práve tri žubrienky na každé jazierko. Každú žubrienku môže ráno nasadiť do jazierka v deň, ktorý si zvolí. Žubrienky Tárajko nemôže z jazierok nikdy vyberať.

Ako ich má postupne nasádzať do jazierok tak, aby boli čo najskôr všetky tri jazierka úplne zaplnené? Ktorý deň v poradí sa to stane? Prečo to nejde za menej dní?

Riešenie

Najskôr sa môžu všetky jazierka ukázať plné v siedmy deň, teda po šiestich nociach. Aby sme ukázali, že tento počet je minimálny, musíme ukázať dve veci. Jednak, že Tárajkovi toľko času stačí, a zároveň, že menej mu stačiť nemôže.

Poďme si najprv ukázať postup, ako nasádzať žubrienky do jazierok tak, aby boli po šiestich nociach zaplnené.

Nech na začiatku dá Tárajko do prvého jazierka 3 žubrienky, do druhého 1 a do tretieho 2. To znamená, že na druhý deň ráno bude v prvom 6 žubrienok, v druhom 2 a v treťom 4. Vtedy prihodí žubrienku do druhého jazierka, čiže už tam budú 3. Po ďalšej noci bude mať žubrienok postupne 12, 6 a 8. Tárajko pridá jednu do tretieho jazierka, aby ich bolo 9. Na štvrtý deň ráno bude populácia jazierok postupne 24, 12, 18. V tejto chvíli Tárajko pridá poslednú zostávajúcu žubrienku do druhého jazierka. Počty žubrienok v jednotlivých jazierkach za zvyšné tri noci stúpnu najprv na 48, 26 a 36, potom na 96, 52 a 72 a nakoniec na 96 (192 by bolo viac, než kapacita prvého jazierka dovoľuje), 104 a 144, čo sú presne počty, ktoré sme chceli dosiahnuť.

Iný spôsob, ako spočítať počet žubrienok pri danom postupe a overiť tak jeho správnosť by bolo možné založiť na tom, že z každej žubrienky máme po noci 2, tým pádom po dvoch nociach 4, po troch 8, po štyroch 16, po piatich 32 a po šiestich 64. Keď do prvého jazierka dáme hneď všetky 3 žubrienky, po šiestich nociach by ich tam malo byť $3 \cdot 64 = 192$, čo však presahuje kapacitu, teda sa rozdelili o jeden raz menej na iba $3 \cdot 32 = 96$ jedincov. Do druhého jazierka sme dali žubrienky postupne v prvé, druhé a štvrté rána, takže tam strávili jednotlivo šesť nocí, päť a tri, čím sa rozdelili na dohromady $64 + 32 + 8 = 104$ žubrienok. Do tretieho boli žubrienky vložené 2 na začiatku a 1 v tretie ráno, čo im dalo postupne šesť nocí a štyri, aby sa z nich stalo $2 \cdot 64 + 16 = 144$. Nakoľko pri delení ani pri nedelení žubrienok neubúda, určite sa pri tomto procese nemohlo stať, že by sme niekde prehliadli medzičasom prekročenú kapacitu, lebo po takom prekročení sa už nedá vrátiť späť.

Zostáva nám ešte ukázať, že menej dní Tárajkovi nepostačí. Menej dní znamená maximálne päť nocí. Bez ohľadu na kapacitu jazierka sa žubrienky delia najrýchlejšie vtedy, keď sa delia vždy (každú noc). Na to, aby sa žubrienka mohla deliť, okrem kapacity potrebuje ešte byť v jazierku. Preto najvyššie počty dosiahneme tak, že všetky naše žubrienky dáme hneď na začiatku do jazierka s dostatočnou kapacitou. Avšak, keď vhodíme do ľubovoľne veľkého (môžeme si predstaviť neobmedzené) jazierka 3 žubrienky (viac pre jedno jazierko nemáme), po piatich nociach (čo sa nám aj stalo v prvom jazierku v popísanom postupe) z nich bude iba $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$. To znamená, že druhé a tretie jazierko nemožno za taký čas zaplniť, a teda šesť nocí je hľadaným minimom.

Prístup k dokazovaniu druhej časti pri druhom popísanom spôsobe počítania žubrienok by bol azda ešte jednoduchší. Vieme, že za päť nocí sa z jedného exemplára stane 32. Preto z troch sa nemôže stať viac než $3 \cdot 32 = 96$. To je však primálo na dve zo zámockých jazierok, čiže primálo bolo aj dostupných nocí.

Komentár

Napriek tomu, že táto úloha pozostávala iba z dvoch pomerne jednoduchých krokov, k úplnému riešeniu sa dopracovala len hŕstka z vás. Tomu, kto správne pochopil zadanie, sa zväčša podarilo urobiť aj prvý krok na ceste ku kompletnému riešeniu, a teda ukázať, že sa to na ten náš najmenší počet dní dá. Čo bola avšak dôležitejšia časť riešenia, bolo ukázať, prečo by sme nejakým iným spôsobom nevedeli jazierka zaplniť už skôr. Ak sme v našom dôkaze toto neuviedli, neukázali sme, že je naozaj ten náš výsledok správny a to nesmie chýbať v žiadnom riešení úlohy MALYNÁRa. Bol tu aj druhý spôsob riešenia, síce omnoho zdĺhavejší, no stále správny, a síce prediskutovať všetky možnosti vhadzovania žubrienok do jazierok. Touto náročnou cestou sa vydali len dvaja riešitelia, ktorým sa ale dôkaz podarilo dotiahnuť dokonca.

6

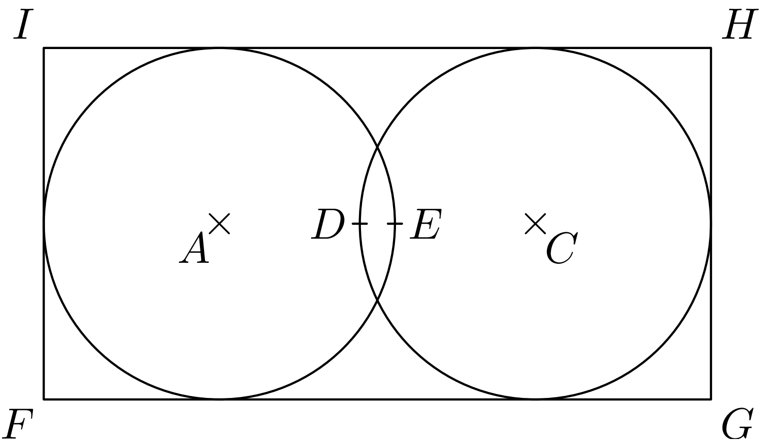
opravovali **Lujza Milotová** a **Timea Szöllősová**

najkrajšie riešenia: Magdaléna Škriabová, Daniela Tkáčová

75 riešení

Zadanie

Na gobelíne sú nakreslené dve rovnako veľké pretínajúce sa kružnice a okolo nich obdĺžnik $FGHI$ tak, že kružnice obdĺžnik nepretínajú, no každá má s ním tri spoločné body (ako na obrázku). Boli tam tiež vyznačené niektoré zaujímavé body – stredy kružníc ako body A a C a priesečníky úsečky AC s kružnicami ako body D a E. Aký je súčet obsahov trojuholníkov FDI a FGE, ak polomer kružnice je 10 cm a obsah obdĺžnika je $760\,\text{cm}^2$? Úlohu neriešte rysovaním.



Riešenie

Na výpočet obsahov trojuholníkov využijeme tento vzorec: obsah trojuholníka sa rovná polovici súčinu dĺžok strany trojuholníka a výšky na túto stranu.
Body, v ktorých pretne priamka AC obdĺžnik $FGHI$, si pomenujeme M (na strane FI) a N (na strane HG).
Obsah trojuholníka FGE: Obdĺžnik $FGHI$ má obsah $760\,\mathrm{cm}^2$, čo vypočítame ako $|IF| \cdot |FG|$. Strana IF je rovnako dlhá ako priemer kružnice. Keďže polomer kružnice je $10\,\mathrm{cm}$, tak $|IF| = 2 \cdot 10 = 20\,\mathrm{cm}$. Potom $|FG| = 760/20 = 38\,\mathrm{cm}$. Výška na stranu FG je dlhá $10\,\mathrm{cm}$, pretože bod E je na úsečke AC, ktorá je od FG vzdialená presne o polomer kružníc. Obsah trojuholníka teda vypočítame ako $38 \cdot 10/2 = 190\,\mathrm{cm}^2$.
Obsah trojuholníka FDI: Dĺžku strany FI už poznáme ($20\,\mathrm{cm}$). Teraz vypočítame dĺžku výšky na túto stranu, čo je vlastne $|MD|$. $|MD| = |MN| - |DN|$, čo je rozdiel dĺžok dlhšej strany obdĺžnika a priemeru kružnice. Čiže $|MD| = 38 - 20 = 18\,\mathrm{cm}$. Obsah trojuholníka teda vypočítame ako $20 \cdot 18/2 = 180\,\mathrm{cm}^2$.
Súčet obsahov trojuholníkov FDI a FGE je $190 + 180 = 370\,\mathrm{cm}^2$.

Komentár

Takmer všetci ste sa dopracovali k správnemu výsledku, viacerí z vás však zabudli dostatočne popísať jednotlivé kroky. Pri takýchto výpočtových úlohách nie je dôležité len napísať správne rovnice, ale aj presvedčiť opravovateľov, že sú naozaj správne, a, že ste si hodnoty v nich nevycucali z prsta. :) Okrem toho ste ešte viacerí počítali vzdialenosť medzi bodmi D a E, ktorá však nebola v riešení potrebná.

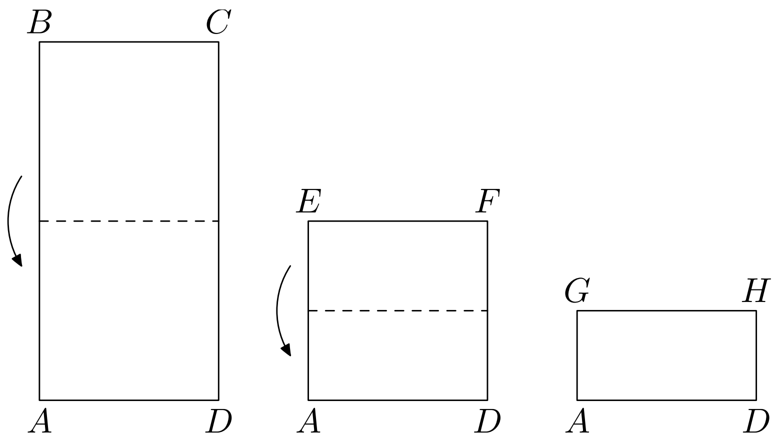
Autori vzorových riešení: Jakub Genči, Florián Hatala, Peter Kovács, Martin Masrna, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Zuzana Ontkovičová, Žaneta Semanišinová, Roman Staňo

Zadania 2. série úloh zimného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do **25. novembra 2019**

Úloha 1

Tárajka zaujal obrúsok. Mal tvar obdĺžnika $ABCD$. Ak ho preložíme na polovicu, dostaneme obrúsok v tvare obdĺžnika $ADFE$. Ak to isté spravíme s obdĺžnikom $ADFE$, získame obdĺžnik $ADHG$ (ako na obrázku). Obvod obdĺžnika $ADHG$ je $24\,\mathrm{cm}$ a obdĺžnika $ABCD$ $48\,\mathrm{cm}$. Aký je obsah obdĺžnika $ABCD$? Úlohu neriešte rysovaním.



Úloha 2

V jazierku plávalo 10 žubrienok v kruhu. Na chrbtoch mali nejako rozmiestnené všetky čísla od 1 do 10. Žubrienky s číslami 1, 3, 5, 7 a 9 sú na nepárnych pozíciách v kruhu a žubrienky s číslami 2, 4, 6, 8 a 10 sú na párnych. Tárajko na nich poriadne nedočiahol, takže mohol urobiť iba nasledovné:

- *K číslu vybranej žubrienky pripočítať súčet jej susedov.*
- *Od čísla vybranej žubrienky odčítať rozdiel čísel žubrienok vzdialených 2.*

Môže Tárajko dosiahnuť rovnosť súčtov čísel na chrbtoch žubrienok na nepárnych a párnych pozíciách? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Úloha 3

Cestou do krčmy rátal domy. Vyšlo mu päťciferné číslo. Toto číslo neobsahuje cifry 0 ani 1, ale určite obsahuje práve jednu cifru 6. Je v ňom párny počet párnych číslic. Druhá až štvrtá číslica sú menšie ako 4 a v čísle vieme dvakrát nájsť dve susediace *číslice, ktoré sa rovnajú. Štvrtá cifra udáva, koľko je v čísle dvojok. Okolo koľkých domov prešiel Tárajko? Nájdite všetky možnosti a odôvodnite, že iné nie sú.*

Úloha 4

Štadión má tvar obdĺžnika $ABCD$ s dlhšou stranou AB. Uhlopriečky AC a BD zvierajú uhol $60°$ (ten oproti kratšej strane štadióna). Futbalisti trénujú na veľkom okruhu $ACBDA$ alebo na malej dráhe ADA. Roland behal 10-krát po veľkom okruhu a Benedikt 15-krát po malej dráhe (to znamená, že po hrane AD prebehol 30-krát). Obaja dokopy ubehli $4,5$ km. Aká dlhá je uhlopriečka AC? Úlohu neriešte rysovaním! (Ak máte s úlohou problém, tak by vám mohlo pomôcť naše „Edukačné okienko“ z minuloročného časopisu Malynár-28-4, ktorý nájdete na našej stránke.)

Úloha 5

Sto šálkov si myslí celé číslo (všetci to isté). Každý buď stále klame, alebo stále hovorí pravdu. Najprv v nejakom poradí povedia vety: „Číslo je aspoň 1.“ „Číslo je aspoň 2.“ …„Číslo je aspoň 100.“ Potom povedia v nejakom poradí vety: „Číslo je menšie ako 1.“ „Číslo je menšie ako 2.“ …„Číslo je menšie ako 100.“ Koľko šálkov klame? Nájdite všetky riešenia a svoje riešenie odôvodnite.

Úloha 6

Pole je veľké 7×7 štvorčekov a na ňom niekde náhodne stojí armáda v podobe obdĺžnika s dĺžkami strán 3 a 2. Koľko najmenej striel musia šálkovia vystreliť z parného dela, aby si boli istí, že armádu zasiahli? Ukážte nejaký prípad rozmiestnenia striel a dokážte, že na menej to nejde.

Poradie po 1. sérii zimného semestra

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
1. - 3.	Timotej Války	Z4	ZBoroBA	9	9	9	9	2	9	0	**54**
	Hana Erdélyiová	Z4	ZPankBA	9	9	9	-	9	9	0	**54**
	Zdenko Čurný	Z4	ZPAngKE	9	9	9	9	9	-	0	**54**
4. - 5.	Stanislav Beneš	Z3	P107NYC	9	8	9	9	-	9	0	**53**
	Alena Chladná	Z4	ZKJNŠSt	9	8	9	7	9	9	0	**53**
6.	Daniela Tkáčová	Z4	ZLevoSN	9	7	9	7	2	9	0	**50**
7. - 9.	Tomáš Lang	Z6	ZOKožSN	9	5	9	7	9	9	0	**48**
	Matěj Pometlo	Z5	FZOCPHA	9	9	8	7	2	8	0	**48**
	Nina Hudáková	Z5	SZLerKE	9	9	9	6	2	9	0	**48**
10. - 16.	Richard Prikler	Z6	GJARMPO	9	9	9	9	2	9	0	**47**
	Martina Osuska	Z6	ZDrJDMA	9	9	9	7	9	4	0	**47**
	Adam Adamuščín	Z4	ŠpMNDaG	9	9	9	9	2	-	0	**47**
	Hana Ihnátová	Z4	ZObcSeč	5	8	9	7	2	9	0	**47**
	Jakub Hutník	Z5	ZDruzKE	9	7	9	7	2	8	0	**47**
	Magdaléna Škriabová	Z5	ZKro4KE	9	8	9	6	2	9	0	**47**
	Michal Válek	Z5	ZKro4KE	8	9	9	6	2	9	0	**47**
17.	Vojto Bálint	Z4	ZGaštZA	9	9	3	7	9	-	0	**46**
18. - 23.	Michal Vodička	Z6	GAlejKE	9	8	9	8	2	9	0	**45**
	Alenka Bálintová	Z6	CZRZaZA	9	9	9	7	2	9	0	**45**
	Richard Semanišin	Z3	ZPAngKE	9	9	9	7	2	-	0	**45**
	Matej Karpáč	Z6	ZJŠveHE	9	9	9	7	2	9	0	**45**
	Adam Klein	Z5	ZOKožSN	8	6	9	7	2	9	0	**45**
	Anna Krupová	Z4	ZKro4KE	9	4	9	7	2	7	0	**45**
24.	Janka Urbánová	Z6	GAlejKE	9	9	8	7	2	9	0	**44**
25. - 27.	Jakub Šimon Konrád	Z6	ZKe28KE	9	9	9	5	2	9	0	**43**
	Barbora Cimráková	Z6	CZRZaZA	9	9	9	7	1	8	0	**43**
	Samuel Györi	Z6	ZKro4KE	9	9	9	6	2	8	0	**43**
28. - 29.	Soňa Grofčíková	Z6	ZLNovKE	9	7	8	7	2	9	0	**42**
	Martin Kubiš	Z6	GABerSC	9	4	9	2	9	9	0	**42**
30.	Ondrej Tóth	Z6	GVaršZA	9	9	9	3	2	9	0	**41**
31.	Tomáš Trudič	Z6	SZSloSB	9	9	9	2	2	9	0	**40**
32. - 33.	Juraj Horňák	Z6	ZKro4KE	9	4	9	6	2	9	0	**39**
	Šimon Varga	Z5	ZKro4KE	8	9	9	2	2	9	0	**39**
34.	Patrik Sklenár	Z3	ZKom6SL	9	2	8	7	2	-	0	**37**
35. - 37.	Jakub Matracz	Z5	ZKe30KE	6	8	9	0	2	9	0	**36**
	Patrik Puškár	Z5	ZPoliKE	8	9	9	6	2	-	0	**36**
	Lívia Lukáčová	Z5	ZPoliKE	9	8	9	1	2	6	0	**36**
38. - 40.	Martin Vŕba	Z6	ZKro4KE	9	9	0	1	8	8	0	**35**
	Sarah Klopstock	Z6	ŠpMNDaG	8	9	9	0	2	7	0	**35**
	Barbora Menšíková	Z5	ZKro4KE	8	7	9	7	2	-	0	**35**
41. - 45.	Filip Kovács	Z6	ZMRŠHLC	9	7	9	1	2	6	0	**34**
	Adam Gubík	Z6	ZKro4KE	9	9	-	6	2	8	0	**34**
	Jakub Stramba	Z5	ZKro4KE	5	4	9	7	2	5	0	**34**
	Filip Daubner	Z3	ZBáhoň	9	9	-	7	-	-	0	**34**
	Ondrej Medo	Z3	ZSchmit	9	9	7	-	-	-	0	**34**
46.	Lukáš Dankanin	Z5	ZKro4KE	5	9	-	-	9	9	0	**32**
47. - 48.	Janka Ľochová	Z6	GĽŠ26MI	8	4	8	7	2	2	0	**31**
	Iveta Štefančínová	Z5	ZŠmerPO	9	4	8	1	0	8	0	**31**
49. - 50.	Ján Štiavnický	Z6	ZKro4KE	8	9	9	2	2	0	0	**30**
	Michal Jasso	Z6	UNESJNR	5	6	-	2	9	8	0	**30**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
51. - 54.	Juraj Stach	Z6	ZTSNPBB	6	9	-	5	2	7	0	**29**
	Ema Vrábľová	Z5	ZTSNPBB	9	7	1	0	2	9	0	**29**
	Matúš Vresilovič	Z5	ZOKožSN	4	4	9	0	2	8	0	**29**
	Sára Vojtková	Z5	ZPoliKE	5	9	-	7	2	4	0	**29**
55. - 56.	Anka Birková	Z5	ZKro4KE	4	3	9	2	2	8	0	**28**
	Boris Köröš	Z6	GAlejKE	5	9	-	6	-	8	0	**28**
57. - 60.	Tomáš Polomský	Z6	ZKro4KE	4	7	9	1	1	5	0	**27**
	Patrik Zboja	Z4	ZMRŠHLC	9	9	-	-	-	-	0	**27**
	Ema Vargová	Z6	ZStanKE	6	7	8	1	5	-	0	**27**
	Gorazd Korečko	Z5	ZKro4KE	6	3	9	-	-	9	0	**27**
61. - 64.	Michal Ferdinandy	Z6	GAlejKE	5	9	8	-	2	2	0	**26**
	Viliam Slašťan	Z6	ZKro4KE	0	7	9	0	2	8	0	**26**
	Alžbeta Petzová	Z6	ZKúp2PO	5	7	5	0	2	7	0	**26**
	Samuel Šimurda	Z5	ZKro4KE	8	-	9	1	0	8	0	**26**
65. - 67.	Dorián Lovič	Z6	ZKro4KE	6	0	8	2	0	8	0	**24**
	Marek Malejčík	Z6	ZOKožSN	-	9	9	4	2	-	0	**24**
	Viktória Sarnovská	Z6	ZStanKE	9	4	0	1	2	8	0	**24**
68. - 70.	Hana Hricová	Z5	ZKro4KE	9	5	-	1	2	5	0	**23**
	Marko Strompf	Z5	ZKro4KE	8	4	9	0	2	-	0	**23**
	Samuel Frniak	Z5	ZOKožSN	2	9	9	3	-	-	0	**23**
71. - 72.		Z5	ZKro4KE	5	4	9	1	2	-	0	**22**
	René Ivan	Z5	ZKro4KE	9	5	-	6	2	-	0	**22**
73. - 76.	Eva Kopková	Z6	ZStanKE	6	4	-	0	2	9	0	**21**
	Martin Heutschy	Z6	ZGrunKK	6	5	-	-	2	8	0	**21**
	Richard Sedlačko	Z5	ZVažePO	3	8	8	0	2	-	0	**21**
	Gregor Pribičko	Z5	ZKro4KE	8	5	-	-	2	6	0	**21**
77. - 78.	Patrik Sliva	Z6	ZOKožSN	9	9	-	2	-	-	0	**20**
	Miriam Varechová	Z5	ZKro4KE	8	4	0	6	2	-	0	**20**
79. - 80.		Z5	ZVažePO	3	4	-	3	0	9	0	**19**
	Ema Peleyová	Z6	ZStanKE	6	8	-	1	2	2	0	**19**
81. - 84.	Mia Bors	Z6	GABerSC	9	0	0	-	2	7	0	**18**
	Michal Šarkan	Z6	ZMRŠHLC	-	8	-	2	-	8	0	**18**
	Ingrid Hlavandová	Z6	GABerSC	5	2	0	1	2	8	0	**18**
	Michal Haľko	Z5	ZDruzKE	3	1	9	1	2	2	0	**18**
85. - 87.	Martin Kokoruďa	Z5	ZOKožSN	5	6	-	5	-	-	0	**16**
	Radovan Štefančín	Z5	ZŠmerPO	5	4	1	1	0	4	0	**16**
	Šarlota Šustová	Z5	ZKro4KE	5	3	8	0	-	-	0	**16**
88.	Alex Špilová	Z5	ZTSNPBB	3	0	1	0	2	9	0	**15**
89. - 91.	Ondrej Kováč	Z6	ZKro4KE	-	5	9	-	-	-	0	**14**
	Jakub Kirňak	Z5	ZOKožSN	-	8	6	-	-	-	0	**14**
	Sofia Törökova	Z6	ZStanKE	5	6	0	1	2	-	0	**14**
92. - 95.	Tomáš Marcin	Z6	ZKúp2PO	3	1	0	0	2	7	0	**13**
	Lenka Harmanská	Z5	ZKro4KE	8	4	-	1	0	-	0	**13**
	Sofia Sýkorková	Z5	ZTSNPBB	5	2	-	1	2	2	0	**13**
	T. Timkovičová	Z5	ZJuhVnT	5	8	-	-	-	-	0	**13**
96. - 97.	Danka Harmanská	Z5	ZKro4KE	8	4	-	0	0	-	0	**12**
	Tadeáš Ihnát	Z5	ZJuhVnT	3	2	-	0	2	5	0	**12**
98. - 100.	Dávid Krivjanský	Z5	ZŠtefHE	-	-	-	-	2	9	0	**11**
	Jakub Kopernický	Z6	ZAlžbNB	3	2	-	2	2	2	0	**11**
	Nina Juríková	Z6	ZOKožSN	3	2	-	0	-	6	0	**11**
101. - 103.	Jordan Stanislav Boiadjiev	Z6	ZOKožSN	8	0	-	0	2	-	0	**10**
	Lukáš Glovňa	Z6	ZGrunKK	5	5	-	-	-	-	0	**10**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
	František Krč	Z5	ZKro4KE	5	4	-	1	-	-	0	**10**
104. - 111.	Michala Chalmovianská	Z5	ZZohor	9	-	-	-	-	-	0	**9**
	Jakub Schmotzer	Z5	ZKro4KE	9	-	-	-	-	-	0	**9**
	Barbora Hricová	Z5	ZJuhVnT	5	4	-	-	-	-	0	**9**
	Richard Orosz	Z5	ZKro4KE	5	1	3	-	-	-	0	**9**
	Šimon Šima	Z6	ZKro4KE	9	0	-	0	-	-	0	**9**
	Tam Anh Nguyen	Z5	ZKomeMI	3	-	-	-	-	6	0	**9**
	Tobias Kvetko	Z5	ZZochRA	5	1	-	1	2	-	0	**9**
	Petronela Klubertová	Z6	ZStanKE	3	2	0	2	2	-	0	**9**
112.	Michael Harvilko	Z6	ZBernPO	3	1	4	0	-	-	0	**8**
113. - 114.	Bors Peter	Z5	ZVažePO	3	0	4	0	0	-	0	**7**
	T. Doľacká	Z5	ZJuhVnT	4	3	-	0	-	-	0	**7**
115. - 116.	Tomáš Olekšák	Z5	ZZochRA	0	2	-	2	2	-	0	**6**
	Dárius Domonkoš	Z5	ZStanKE	3	0	-	1	2	-	0	**6**
117. - 119.	Veronika Langová	Z6	ZOKožSN	0	5	-	-	-	-	0	**5**
	Arman Azizi	Z6	ZMRŠHLC	3	-	-	2	-	-	0	**5**
	Marek Hrivnák	Z6		2	0	-	1	2	-	0	**5**
120. - 121.	Adam Zumerling	Z6	ZAlžbNB	3	1	-	-	-	-	0	**4**
	Filip Čuba	Z6		3	0	-	1	-	-	0	**4**
122. - 126.	Bernadeta Rút Benková	Z6	ZSpByst	-	1	-	-	2	-	0	**3**
	František Bublák	Z5	ZRabčice	-	0	-	1	0	2	0	**3**
	Dávid Lipták	Z5	ZSpByst	-	1	-	-	2	-	0	**3**
	Kristína Jakubčová	Z5	ZSpByst	-	1	-	-	2	-	0	**3**
	Šimon Jurík	Z5	ZKro4KE	0	3	0	0	0	-	0	**3**
127. - 128.	Daniel Sopko	Z6	ZSpByst	-	0	-	-	2	-	0	**2**
	Boris Köröš	Z6	GAlejKE	-	-	-	-	2	-	0	**2**
129. - 130.	Laura Petrášková	Z6	ZOKožSN	-	1	-	-	-	-	0	**1**
	Matúš Vlčko	Z6	UNESJNR	-	1	-	-	0	-	0	**1**
131.	Matúš Hecko	Z5	ZOKožSN	-	0	-	0	-	-	0	**0**

Názov:	MALYNÁR – korešpondenčný matematický seminár Číslo 2 • November 2019 • Zimný semester 29. ročníka
Internet:	`malynar.strom.sk`
E-mail:	`malynar@strom.sk`
Organizátor:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja
OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk