**Číslo 1 • September 2006** **Zimný semester 31. ročníka (2006/2007)**

# STROM

Korešpondenčný matematický seminár

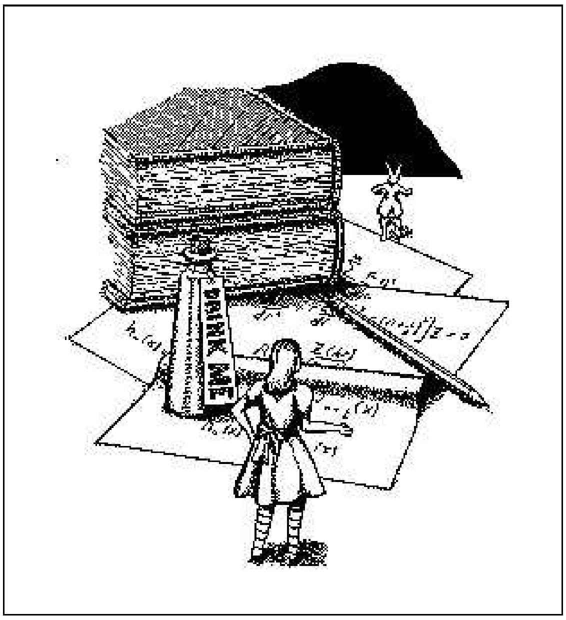
Milí naši riešitelia!

Prázdniny sa skončili a je tu čas opäť zasadnúť do školských lavíc a pustiť sa do učenia. Veru dosť bolo oddychu, slnenia sa niekde pri vode, či bláznenia sa na nejakom hudobnom festivale. Je načase ukázať, že vo vás niečo je. No a popri škole sa môžete venovať aj rôznym voľnočasovým aktivitám. Veríme, že jednou z nich bude aj náš/váš obľúbený seminár **STROM**.

Týmto číslom načíname štvrtú desiatku najstaršieho seminára, ktorý už viac ako 10 rokov nesie názov **STROM**. A na jeho úvod máme pre vás v prvej sérii aj úlohu na povzbudenie, kde oceníme každé správne riešenie, ktoré nám príde spolu s prvou sériou úloh.

Tak hor sa do riešenia úloh, veď termín prvej série sa pomaličky blíži. Želáme vám veľa trpezlivosti pri objavovaní ďalších krás matematiky.

Vaši **STROM**isti




## PALMA

Aj tento rok pre vás pripravujeme programátorskú súťaž pre stredoškolské družstvá s názvom PALMA. Radi uvítame všetkých, ktorí majú chuť si zasúťažiť, otestovať svoje riešiteľské schopnosti, prípadne sa niečo nové naučiť. Bližšie informácie ako aj úlohy z minulého ročníka nájdete na domovskej stránke súťaže: `http://palma.strom.sk`.

## KMM - Klub mladých matematikov je späť

Veru konečne po roku je tu opäť Klub mladých matematikov. O jeho programe a náplni sa dozviete čoskoro na `http://umv.science.upjs.sk/kmm` a termíny klubu nájdete i na stránke nášho-vášho seminára `http://seminar.strom.sk`. Veríme, že nepohrdnete takouto ponukou a radi ju využijete.

**STROM** — Súťaž Talentovaných Riešiteľov Obľubujúcich Matematiku – je pokračovateľom najstaršej súťaže svojho druhu v bývalom Česko-Slovensku, ktorá vznikla pod názvom Korešpondenčný matematický seminár v roku 1976 v Košiciach. Je určený žiakom stredných škôl, ktorí majú záľubu v matematike a radi riešia neštandardné a zaujímavé úlohy.

Prebieha korešpondenčnou formou, čo znamená, že riešitelia pošlú do stanoveného termínu (svoje vlastné) riešenia úloh organizátorom. V priebehu niekoľkých týždňov ich dostanú späť, ale už s opravenými chybami a s počtom bodov, ktoré za úlohy získali.

V časopise, ktorý súťaž sprevádza, je ku každej úlohe uvedený komentár a stručný návod na riešenie. Už sa stalo tradíciou, že neuverejňujeme priebežné poradie, pretože chceme, aby pre riešiteľov boli výzvou samotné úlohy a nie ostatní riešitelia. Po uzavretí semestra, teda **dvoch sérií**, zverejníme celkové poradie a tí najlepší sa zúčastnia týždňového matematického sústredenia v niektorom rekreačnom zariadení na Slovensku.

## Pokyny pre riešiteľov

**Riešiteľmi** môžu byť žiaci prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci z nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov.

**Úlohy** riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeniach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Zasielajte ich **poštou (!!!), nie osobne** do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) organizátorom na adresu:

**STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice**.

S prvou sériou, ktorej riešenia nám posielate, pošlite vyplnenú **prihlášku**. Riešenie každej úlohy píšte na samostatný papier **formátu A4** na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail `strom@strom.sk`, prostredníctvom debaty na našej stránke alebo osobne.

Ak si s nejakou úlohou nebudete vedieť poradiť, no radi by ste i napriek tomu vedeli jej riešenie, pošlite nám riadne A4-ku s hlavičkou a namiesto riešenia nám na ňu napíšte, kde ste pri uvažovaní skončili (resp. sa vám ani nepodarilo odraziť sa…) a my vám na ten hárok papiera ochotne naznačíme riešenie. Nech si matematici naďalej pomáhajú!

**Bodovanie** úloh závisí od kvality riešenia, za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 5 bodov.
**Prvákom** sa do poradia započítava päť najlepšie vyriešených úloh spomedzi úloh 1 – 8 + počet bodov za najlepšie vyriešenú úlohu.
**Druhákom** sa do poradia započítava šesť najlepšie vyriešených úloh spomedzi úloh 1 – 8.
**Tretiakom** sa do poradia započítava päť najlepšie vyriešených úloh spomedzi úloh 1 až 6 + počet bodov za lepšie vyriešenú úlohu z úloh 7 a 8.
**Štvrtákom** sa do poradia započítavajú štyri najlepšie vyriešené úlohy spomedzi úloh 1 až 6 + úlohy 7 a 8.

**Prémia** sa udeľuje podľa školy na konci semestra. Do úvahy sa berie súčet bodov všetkých žiakov danej školy v príslušnom semestri — ak je ten medzi 1 a 50, každý z nich dostane prémiu 5 bodov, medzi 51 a 100 sú to 4 body, atď., medzi 201 a 250 je to 1 bod, nad 250 je to 0 bodov.

**Varovania (!!!)**. Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie, za poslanie riešení po termíne a za osobné doručenie riešení. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešení zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrená.

**Hlasovanie** úloh závisí od zaujímavosti a jedinečnosti vášho riešenia. Radosť vám môže spraviť 1 hlas (prehľadné, jasné riešenie), alebo 2 či 3 hlasy za výnimočné a originálne nápady. Ak nájdete riešenie v literatúre, kladné hlasy si nepripočítate. Naopak, hrôzu budiace riešenia (výzorom, zložitosťou) získajú $-1$ hlas. Horšie obídu tí, ktorým za odpisovanie strhneme body. Po ich vydelení počtom odpisujúcich dostanú $-3$ hlasy, po veľkom odpisovaní je to $-5$ hlasov. Tak hor sa do hľadania pekných riešení, zabudnime na odpisovanie a hrajme sa s matematikou! Riešitelia s najvyšším počtom hlasov budú na konci semestra odmenení.

**Sústredenie** je pre 32 účastníkov. Je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho podľa záverečného poradia prví desiati riešitelia, ďalších 10 najlepších riešiteľov, ktorých škola je v Košickom alebo Prešovskom kraji a členovia troch najlepších družstiev z Košického (Prešovského) matboja, ktorý sa koná v príslušnom polroku (ak sa koná). Prípadní ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia STROMu; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Na sústredenie však nebudú vôbec pozvaní riešitelia, ktorí získali v príslušnom semestri $-2$ alebo menej hlasov.

## Zadania úloh Zimného semestra 31. ročníka

### 1 Prvá séria
Termín odoslania riešení: **23. október 2006**

**0.** Beží pes z Madridu do Moskvy. Na chvoste má priviazaný zvonček, ktorý zvoní každú polhodinu. Pes začne bežať rýchlosťou 1 m/s a vždy, keď počuje zvonček, zväčší rýchlosť na dvojnásobok. Pes dokáže bežať neohraničenou rýchlosťou. Akú bude mať pes rýchlosť, keď príde do Moskvy?

**1.** Klára Vlárová učí triedu, ktorá sa skladá zo šiestich párov súrodencov. Chce svojich žiakov rozdeliť do tímov na kvíz, ale nechce, aby súrodenci boli v jednom tíme.
a) Koľkými spôsobmi vie rozdeliť žiakov do dvoch šesťčlenných tímov?
b) Koľkými spôsobmi vie rozdeliť žiakov do troch štvorčlenných tímov?
c) Koľkými spôsobmi vie rozdeliť žiakov do štyroch trojčlenných tímov?

**2.** Nech $n$ je celé číslo väčšie ako 6. Dokážte, že ak $n-1$ a $n+1$ sú prvočísla, tak číslo $n^2(n^2+16)$ je deliteľné číslom 720. Platí taktiež, že ak číslo $n^2(n^2+16)$ je deliteľné číslom 720, tak $n-1$ a $n+1$ sú prvočísla?

**3.** Jano si do zošita nakreslil tabuľku $10\times 10$ a vpísal do nej postupne zaradom čísla 1 až 100 (prvých 10 do prvého riadku, ďalších 10 do druhého, atď.). Potom si vybral 10 políčok tak, že žiadne dve z nich neboli v rovnakom riadku ani stĺpci a sčítal čísla vo vybraných políčkach. Aké rôzne hodnoty mohol nadobudnúť tento súčet?

**4.** Nájdite všetky štvorice prirodzených čísel $a$, $b$, $c$, $d$, pre ktoré platí:
a) $\overline{abcd} = a^a + b^b + c^c + d^d$, pričom $\overline{abcd}$ je číslo s ciframi $a, b, c, d$.
b) $a\cdot b\cdot c\cdot d = a^a + b^b + c^c + d^d$.

**5.** Majme trojuholník $ABC$. Nech $AD$, $BE$ a $CF$ sú výšky tohto trojuholníka. Zvoľme body $K$, $L$, $M$ v poradí na stranách $BC$, $CA$ a $AB$ tak, že $|BK| = |DC|$, $|CL| = |EA|$, $|AF| = |MB|$. Dokážte, že kolmice na priamky $BC$, $CA$ a $AB$ prechádzajúce bodmi $K$, $L$, $M$ sa pretínajú v jednom bode.

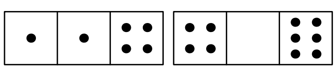
**6.** Máme tabuľku veľkosti $2\times n$ s $2n$ políčkami. V niektorých políčkach sú kamienky. V každom kroku zvolíme políčko s aspoň dvoma kamienkami, dva kamienky z tohto políčka odstránime a jeden kamienok pridáme buď na políčko vpravo alebo na políčko hore od zvoleného. Predpokladajme, že na začiatku máme v tabuľke aspoň $2^n$ kamienkov. Dokážte, že vieme postupovať tak, že po niekoľkých krokoch bude na políčku v pravom hornom rohu tabuľky aspoň jeden kamienok.

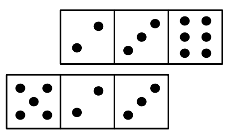
**7.** Nech $p$ je prvočíslo a $n$ je prirodzené číslo väčšie ako 1. Vieme, že $n$ delí $p-1$ a $p$ delí $n^3-1$. Dokážte, že $4p-3$ je druhou mocninou celého čísla.

**8.** V trojuholníku $ABC$ má uhol $BAC$ veľkosť $60°$. Uvažujme pohyblivý bod $D$ vnútri strany $BC$. Nech $O_1$, $O_2$ sú stredy kružníc opísaných po rade trojuholníkom $ABD$, $ACD$. Nech $M$ je priesečník priamok $BO_1$ a $CO_2$ a $N$ je stred kružnice opísanej trojuholníku $DO_1O_2$. Dokážte, že priamka $MN$ prechádza pevným bodom.

### 2 Druhá séria
Termín odoslania riešení: **20. november 2006**

**1.** Robko má v tmavom vrecku tzv. trimino (s hodnotami od 0 po 6), obsahujúce spolu 196 kameňov. Na rozdiel od obyčajného domina nemá každý kameň dve číselné hodnoty, ale tri. Vieme, že ak by mal obyčajné domino, tak existuje 147 možností ako vytiahnuť dva kamene tak, že sa k sebe dajú priložiť rovnakým číslom.
a) Koľko je možností, že vytiahneme 2 kamene trimina tak, že ich bude možné k sebe priložiť rovnakou číselnou hodnotou (obrázok vľavo)?
b) Koľko je možností, že vytiahneme 2 kamene trimina tak, že ich bude možné k sebe priložiť dvoma políčkami (obrázok vpravo)?





**2.** Rovnostranný trojuholník $ABC$ má strany celočíselnej dĺžky $n$ a je úplne rozdelený (rovnobežkami s jeho stranami) na rovnostranné trojuholníčky so stranou 1. Začneme vnútri trojuholníčka obsahujúceho vrchol $A$ a budeme sa prechádzať po trojuholníku $ABC$ tak, že hranicu medzi susednými trojuholníčkami prekročíme vždy len v jej vnútornom bode. Žiadny trojuholníček nenavštívime viac ako raz. Zistite, koľko najviac trojuholníčkov vieme takto navštíviť. Svoju odpoveď zdôvodnite.

**3.** Na Jesennú školu mladých chemikov vedenú profesorom Alfonzom príde 32 účastníkov z 10 škôl celého Slovenska. Z každej školy prídu aspoň traja a najviac štyria účastníci. Navyše, spolu tam bude rovnako veľa chlapcov ako dievčat.
Vymyslite návod (postup, algoritmus), podľa ktorého bude vedieť profesor Alfonz rozdeliť týchto 32 mladých chemikov a chemičiek do štyroch rovnako veľkých družín tak, aby v každej družine bolo rovnako veľa chlapcov aj dievčat, a aby v žiadnej družine neboli dvaja účastníci (je to jedno akého pohlavia) z rovnakej školy. Váš postup musí byť použiteľný bez ohľadu na to, koľko chlapcov a koľko dievčat je z ktorej školy. Žiadne ďalšie informácie nie sú známe.

**4.** V tetivovom štvoruholníku $ABCD$ uhlopriečka $AC$ je osou uhla $DAB$. Na polpriamke $AD$ za bodom $D$ leží bod $E$. Dokážte, že $|CE| = |CA|$ práve vtedy, keď $|DE| = |AB|$.

**5.** Vrchol štvorstena nazveme *magický*, ak sa dá z hrán, ktoré z neho vychádzajú, zostrojiť trojuholník. Rozhodnite, či existuje štvorsten bez magických vrcholov.

**6.** Dvesto študentov sa zúčastnilo matematickej súťaže, na ktorej riešili 6 úloh. Každú úlohu vyriešilo aspoň 120 študentov. Dokážte, že existujú dvaja študenti, ktorí dokopy vyriešili všetkých 6 úloh.

**7.** Máme kružnicu s priemerom $AB$ a tetivou $XY$ kolmou na úsečku $AB$. Bod $K$ leží na priamke $XY$ tak, že $BY \parallel KA$. Bod $L$ leží na priamke $BY$ tak, že $BX \parallel KL$. Nech $M$ je priesečník priamok $BX$ a $AK$. Dokážte, že priamky $AK$ a $LM$ sú na seba kolmé.

**8.** Dokážte, že ak súčet

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2006} + \frac{1}{2007}$$

zapíšeme v tvare zlomku $a/b$, kde $a, b$ sú celé čísla, tak $a$ je deliteľné číslom 3011.


## Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Copycentrum PERGAMON
- Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika, Košice
- Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice

**Názov:** STROM — korešpondenčný matematický seminár
Číslo 1 • September 2006 • Zimný semester 31. ročníka (2006/2007)
**Internet:** `http://seminar.strom.sk`
**E-mail:** `strom@strom.sk`

**Vydáva:** Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
**Internet:** `http://zdruzenie.strom.sk`
**E-mail:** `zdruzenie@strom.sk`

Napísali STROMisti. Štýl tomu dal TEX.