STROM

Korešpondenčný matematický seminár

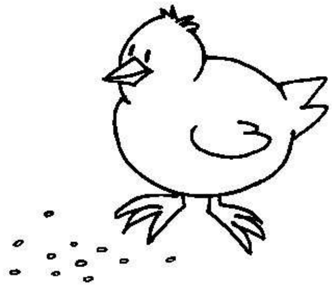
Ahoj, riešitelia naši!

Tak, a máme za sebou prvú sériu opravovania aj my, vaši vedúci. Nebudeme ďaleko od pravdy, ak povieme, že sme sa i zapotili. Ale čo nespravíme pre vás, našich riešiteľov? Tak ako vy s láskou sebe vlastnou spisujete všetky svoje myšlienky, ktoré vás napadnú, tak my vedúci lúštime, čo nám tou-ktorou vetou chcete povedať. Iste ste sa s vervou snažili dať na papier myšlienky, ktoré vás napadli k úlohám druhej série, ktorú už držíme v rukách. My sa veľmi tešíme, ako si ich prečítame.

Veríme, že sa vám podarilo vyriešiť v druhej sérii čo najviac príkladov a stretneme sa spolu na zimnom sústredení. To sa uskutoční od 25. 2. 2007 do 2. 3. 2007 v Gelnici na našom milovanom východnom Slovensku.

Už sa na vás tešíme.

Vaši **STROM**isti.



Q: Why did the chicken scientist cross the road?
A: To invent the other side.

A mathematician and ...

Several scientists were all posed the following question: „What is $2 \cdot 2$?“
The engineer whips out his slide rule (so it's old) and shuffles it back and forth, and finally announces „3.99“.
The physicist consults his technical references, sets up the problem on his computer, and announces „it lies between 3.98 and 4.02“.
The mathematician cogitates for a while, then announces: „I don't know what the answer is, but I can tell you, an answer exists!.“
Philosopher smiles: „But what do you mean by $2 \cdot 2$?“
Logician replies: „Please define $2 \cdot 2$ more precisely.“
The sociologist: „I don't know, but is was nice talking about it.“
Behavioral Ecologist: „A polygamous mating system.“
Medical Student: „4“
All others looking astonished: „How did you know??“
Medical Student: „I memorized it.“

A Mathematician (M) and an Engineer (E) attend a lecture by a Physicist. The topic concerns Kulza-Klein theories involving physical processes that occur in spaces with dimensions of 9, 12 and even higher. The M is sitting, clearly enjoying the lecture, while the E is frowning and looking generally confused and puzzled. By the end the E has a terrible headache. At the end, the M comments about the wonderful lecture.
E: „How do you understand this stuff?“
M: „I just visualize the process“
E: „How can you POSSIBLY visualize something that occurs in 9-dimensional space?“
M: „Easy, first visualize it in N-dimensional space, then let N go to 9.“

Komentáre k úlohám 1. série 31. ročníka

1. Opravovali: Janka Mihalčová, Robko Hajduk, Feri Kardoš Počet riešiteľov: 43
Najoriginálnejší riešitelia: Ondrej Mikuláš, Michal Petrucha,Vladislav Ujházi

Na začiatok by sme sa vám chceli ospravedlniť za vysokú obtiažnosť tretej časti úlohy. Sami sme netušili, akú búdu sme na seba ušili zadaním tejto časti. No po hodinách čítania vašich riešení sme našli pár krásnych riešení aj v tejto časti ulohy. Povedzme si trocha, ako ste mohli uvažovať pri riešení jednotlivých častí tejto úlohy.

Časť po a) ste takmer všetci zvládli. Našlo sa niekoľko takých, ktorí zabudli, že nezáleží na poradí skupín, t.j. predeliť dvomi. Azda ani nemusíme spomínať, že očakávané správne riešenie bolo 32 rôznych usporiadaní. Týchto 32 možností sa dalo nájsť aj jednoduchým vymenovávaním.

Do druhej časti, po b), sa pustili viacerí s odhodlaním, ktoré často viedlo správnym smerom. Tu už vymenovať všetky možnosti neprichádza do úvahy, sú ich totiž stovky. Schodnejšia cesta k správnemu výsledku bola nejako všetky tie možnosti rozdeliť a zrátať. Úvaha, ktorá sa vyskytla vo vašich riešeniach najčastejšie, spočívala jednoducho v tom, že najprv vyrobím prvé štvorčlenné družstvo, potom druhé, a tí štyria, ktorí zostanú, budú tvoriť tretie.

Počet možnosti, ako vytvoriť prvú štvoricu je $\frac{12\cdot10\cdot8\cdot6}{4!} = 240$. Prečo? Za prvého člena prvej štvorice môžeme zobrať kohokoľvek (12 možností), za druhého niekoho zo zvyšných detí okrem súrodenca prvého člena (10 možností) atď. Výsledný počet ale ešte musíme vydeliť 4!, pretože daní štyria žiaci sa do daného družstva mohli dostať v akomkoľvek poradí, a teda každá štvorica je tam zarátaná 4! krát.

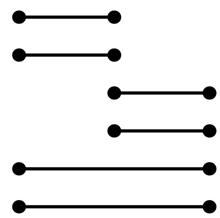
Uvedieme aj inú možnosť, ako vypočítať počet možností ako vytvoriť prvú štvoricu: Vyberieme štyri súrodenecké páry zo šiestich (na to máme $\binom{6}{4}$ možností) a z každého z nich si vyberieme jedno z dvoch detí (na to máme spolu $2\cdot2\cdot2\cdot2 = 16$ možností). Spolu to teda je $\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot16 = 240$ možností.

Rada pre budúcnosť: Často sa počet nejakých možností dá vyjadriť viacerými spôsobmi, ale výsledok by mal vyjsť vždy rovnaký. Preto keď si nebudete istí tým, či vaša úvaha bola správna, skúste tú istú úlohu vyriešiť ešte jedným, principiálne iným spôsobom.

Máme už vytvorené prvé družstvo. Ostali nám dva súrodenecké páry a štyri deti bez súrodenca. Je jasné, že v druhom družstve budú dve deti z tých dvoch súrodeneckých párov ($2\cdot2 = 4$ možnosti) a dve deti bez súrodenca (dve zo štyroch – $\binom{4}{2} = 6$ možností). Na vytvorenie druhého družstva teda máme 24 možností.

Spolu teda máme $240\cdot24 = 5\,760$ možností, ako vytvoriť postupne prvé, druhé a tretie družstvo. Na poradí družstiev ale nezáleží, keď napríklad vymeníme celé prvé a druhé družstvo, dostanem také isté rozdelenie. Každá možnosť tam teda je zarátaná toľko krát, koľko existuje možností povymieňať družstvá medzi sebou, a to je $3! = 6$. Preto je definitívny výsledok rovný $\frac{5\,760}{6} = 960$.

V princípe úplne odlišná úvaha spočíva v tom, že sa nebudeme pozerať na to, ako dané skupiny vznikali, ale pozriem sa na to, ako vyzerá hotové rozloženie. Ako sami vidíte na obrázku vpravo, existuje jediné rozloženie také, že žiadna z 3 skupín neobsahuje oboch členov súrodeneckého páru.



Z obrázku vidíme, že v každej dvojici skupín sú dva súrodenecké páry, z ktorých jeden člen je v prvej a druhý v druhej skupine. Teda zo šiestich súrodeneckých párov si vyberieme 2 páry (na to máme $\binom{6}{2}$ možností), z ktorých jedného dám do prvej skupiny a druhého do druhej (toto vieme spraviť 2^2 spôsobmi). Potom zo štyroch zvyšných súrodeneckých párov vyberieme opäť dva (čiže $\binom{4}{2}$ možností) a tie vieme umiestniť 2^2 spôsobmi. No a poslednu dvojicu dáme na zvyšné miesta a to opäť 2^2 spôsobmi. Tento výsledok ale nezahrňuje fakt, že **nezáleží** na poradí skupín ako sú poukladané (spôsobov ako preukladať 3 skupiny je 3!). Takže výsledký počet predelíme šiestimi. Výsledný počet spôsobov ako rozdeliť 6 súrodeneckých párov do troch štvorčlenných skupín za podmienky, že v žiadnej skupine nie je súrodenecký pár, je teda

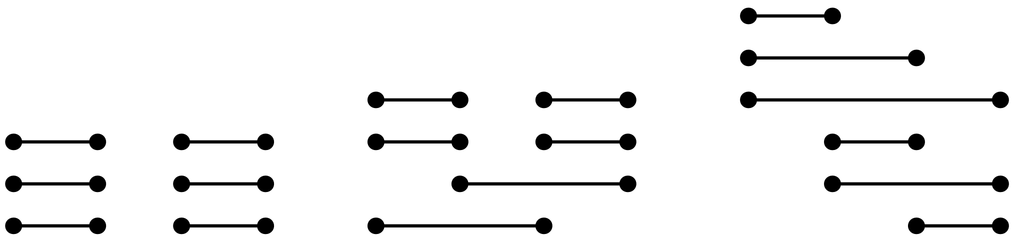
$$\frac{\binom{6}{2} \cdot 2^2 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2^2 \cdot \binom{2}{2} \cdot 2^2}{3!} = 960.$$

Na úlohu sa dá pozrieť ešte z tretej stránky, z pohľadu konkrétneho žiaka. Žiak Jožko bol zadelený do nejakej štvorice. Do koľkých rôznych štvoríc mohol byť zadelený? Druhý člen jeho skupiny určite nie je jeho súrodenec, takže je to jedno z 10 detí. Tretí člen nie je súrodenec prvých dvoch členov skupiny, takže je to jedno z 8 detí, podobne štvrtý člen je jedno zo 6 detí. Títo traja zvyšní členovia Jožkovho tímu ale môžu byť vybratí v akomkoľvek poradí, a teda počet rôznych štvoríc, v ktorých je Jožko, je $\frac{10 \cdot 8 \cdot 6}{3!} = 80$. Vezmime si jednu z týchto možností. Medzi ostatnými 8 deťmi sú ešte dve súrodenecké dvojice. Nech jedna z nich je Janka a Danka. S Jankou je v skupine jedno dieťa z tej druhej súrodeneckej dvojice (dve možnosti) a dve zo zvyšných štyroch detí (6 možností). Je to 12 možností pre každú možnosť s kým je v skupine Jožko, spolu je teda $80 \cdot 12 = 960$ možností ako deti mohli byť rozdelené.

Najkomplikovanejšia pre vás na riešenie a pre nás na opravenie bola časť po c). Opäť je možných viacero prístupov. Môžeme ich rozdeliť podľa toho, či sa pozerám na proces vytvárania skupín, alebo na výsledok.

V prvom prípade najprv zrátame počet možností ako vytvoriť prvú trojčlennú skupinu – je to $\binom{6}{3} \cdot 2^3 = 160$. Pri vytváraní druhej skupiny ale musíme všetky možnosti rozdeliť podľa toho, koľko súrodeneckých párov má prvá a druhá skupina spoločných – môže to byť 0, 1, 2 alebo 3. Takto postupne zrátame všetky možnosti.

V druhom prípade sa pozrieme, ako mohlo celé rozdelenie dopadnúť. Existujú 3 spôsoby ako rozdeliť žiakov tak, aby v skupine nebol súrodenecký pár. Obrázky nám popisujú jednotlivé spôsoby.



$$\text{1. obrázok} = \frac{\binom{6}{3} \cdot 2^2 \cdot 2^2}{2} = 160$$

$$\text{2. obrázok} = \binom{6}{2} \cdot 2 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2\ 880$$

$$\text{3. obrázok} = \frac{12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{4!} = 1\ 920$$

Spolu to je $160 + 2\ 880 + 1\ 960 = 4\ 960$ možností ako usporiadať 6 súrodeneckých párov do štyroch trojčlenných skupín za podmienky, že v žiadnej skupine nieje súrodenecký pár.

Uveďme, ako sme vyčíslili počet možných usporiadaní súrodeneckých parov v treťom obrázku (ostatné si premyslite sami!). Na umiestnenie prvého súrodeneckého páru máme 12 možností, druhý vieme umiestniť už len 10 spôsobmi, ďalšie páry 8, 6, 4, 2 spôsobmi. Nakoľko nám nezáleží na poradí skupín, predelíme výsledok $4! = 24$.

Veríme, že aj keď tretia časť tejto úlohy nepatrila medzi tie jednoduchšie úlohy, vaša chuť ku kombinatorike sa neskazí jedným malým neúspechom. Naopak, bude motiváciou do budúcna pri riešení úloh podobného charakteru. Už sa tešíme, čo prinesie úloha 1 v druhej tohtoročnej sérii.

2. Opravovali: Veronika Čolláková a Robko Hajduk Počet riešiteľov: 44
Najoriginálnejší riešitelia: Alexandra Kuncová, Jakub Vaňo

V tejto úlohe ste sa mohli pekne vybúriť s teóriou čísel, čo sa vám mnohým aj úspešne podarilo.

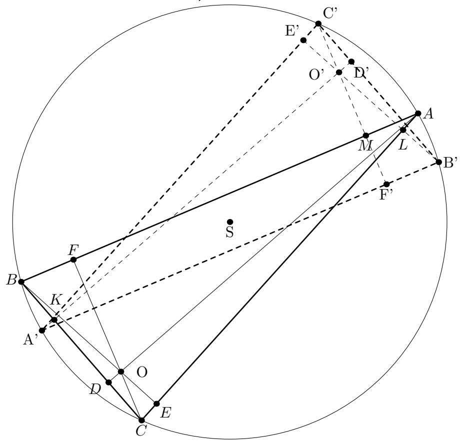
Prvá časť úlohy spočívala v dokázaní, že 2^4 a súčasne aj 3^2 delí daný výraz. To, že to naozaj platí, sa dalo pekne ukázať z vlastností čísel $n+1$, n a $n-1$. No to, že aj 5 delí daný výraz, vám všetkým až také jasné nebolo. Tam sa niektorí pomotali, pritom si len stačilo prebrať zvyšky po delení 5.
Vážnych chýb v úlohe nebolo veľa. Dobrá rada pre budúcnosť tým, ktorí dokazovali deliteľnosť tak, že si číslo rozložili na $720 = 20 \cdot 36$, čo sa v tomto prípade dalo tiež. Bolo treba si dať pozor na to, že sú to súdeliteľné čísla. Totiž aj 360 vyhovuje tomu, že je deliteľné 20 a 36, ale neplatí $720 \mid 360$. Túto súdeliteľnosť potrebujeme nejako obabrať. No a ako na to? Tak najprv ukážeme deliteľnosť 36, no a o podieli, ktorý nám po predelení nášho výrazu číslom 36 ostane, ukážeme, že je deliteľný 20 (veríme, že i sami prídete na to, ako na to).
Takže nabudúce pozor na dokazovanie deliteľnosti tak, že zložené číslo si rozkladáte na súdeliteľné čísla. Jednak sa môžete ľahko pomýliť a koniec koncov aj dokázať niečo, čo neplatí (napríklad číslo je deliteľné 12, ak je deliteľné 2 a 6 zároveň. To, samozrejme, neplatí). Avšak nedá nám nespomenúť najväčšiu a najčastejšiu chybu príkladu, ktorou bola vaša nepozornosť a nedôslednosť.
Výrazná časť z vás totiž chcene alebo nechcene pozabudla na overenie platnosti opačnej implikácie. Ako v našom prípade obrátená implkiácia znie? Je to takáto úloha: Nech n je celé číslo väčšie ako 6. Platí, že ak číslo $n^2(n^2+16)$ je deliteľné číslom 720, tak $n-1$ a $n+1$ sú prvočísla? V tejto úlohe stačí nájsť jedno číslo, pre ktoré obrátená implikácia neplatí. Príklad konkrétnej situácie, v ktorej nejaké tvrdenie neplatí, sa nazýva kontrapríklad na toto tvrdenie. V našom prípade na popis celej situácie stači uviesť číslo n (napríklad 48, alebo 720). Aké jednoduché. A to vás stálo bod. Tak pozor na to.

3. Opravoval: Dávid Hudák **Počet riešiteľov: 53**
Najoriginálnejší riešitelia: Zuzana Harmincová, Martin Vdovičenko, Dávid Vendel
Musím uznať, že takúto úlohu som ešte neopravoval. Riešili ste ju úplne všetci a nejaký ten (najčastejšie správny) súčet tiež každý našiel. Som z vás hotový :). Veľmi ste ma potešili. No dal som si záležať na precíznej oprave a musel som aj postrhávať body. Hlavne za nedostatočné vysvetlenia a za riešenia typu „pre nejaké 2 prípady mi to sedí, tak to bude platiť vždy“. Uvedomte si, že to nie je vo všeobecnosti pravda. A inak som rád, že táto úloha mala taký úspech, veď aj výsledok bol zaujímavý, čo poviete? Blahoželám vám, len tak ďalej.

4. Opravoval: Ján "Kuiso" Kuis **Počet riešiteľov: 44**
Najoriginálnejší riešitelia: Tomáš Kocák, Vlado Ujházi
Úloha bola pomerne jednoduchá a skoro všetci ste si s ňou poradili. Takmer každý zistil, že najväčšia cifra môže a musí byť 5. Z toho ste rýchlo usúdili, že tam musí byť i cifra 3. A zvyšok ste zväčša už len vyskúšali. V druhej časti ste postupovali rovnako, zistili ste najväčšiu cifru a zvyšné možnosti ste vyskúšali.
Niektorí zadanie pochopili tak, že cifry musia byť rôzne. Zo zadania to však nevyplýva.
Takmer všetci z Vás sa však uchýlili k skúšaniu väčšieho množstva možností. Je naozaj ťažké určiť, či veľa sú 4, 14, 140 alebo 1400 možností. Vždy je však lepšie úvahami ich vylúčiť čo najviac. Čím menej ich je, tým kvalita riešenia stúpa.

5. Opravoval: Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 22**
Som s vami všetkými veľmi spokojný! Drvivá väčšina z tých, ktorí poslali riešenie tejto úlohy, to zvládla, čomu som nesmierne rád. (Niečo z vás predsa len bude.)
Ak si správne zakreslíme zadaný trojuholník ABC, výšky v ňom a priamky kolme postupne na strany BC, AC, AB, prechádzajúce postupne bodmi K, L, M, môžeme si všimnúť, že výška BE je rovnobežná s kolmicou na stranu CA prechádzajúcou bodom L. Ale to nie je všetko! Všimnime si, že z $CL = EA$ nám hneď vyplýva, že $CE = LA$.
To ale znamená, že kolmicu na CA v bode L vieme dostať, ak zobrazíme výšku BE v stredovej súmernosti podľa ľubovoľného bodu osi strany CA. Podobnou úvahou dospejeme k tomu, že kolmicu na BC v bode K vieme získať z výšky AD, a kolmicu na AB v bode M pomocou výšky CF.
Je známe, že osi strán každého trojuholníka sa pretínajú v jednom bode – strede opísanej kruznice, v bode S. Ak daný trojuholník ABC zobrazíme v stredovej súmernosti podľa bodu S, dostaneme trojuholník $A'B'C'$. Všimnime si, ako sa v tejto stredovej súmernosti zobrazilo ortocentrum O. Zobrazí

sa do bodu O'. Z vlastností stredovej súmernosti vyplýva (sami si premyslite, že to tak naozaj je!), že výšky v trojuholníku $A'B'C'$ (ak ich predĺžime) určujú vlastne postupne priamky $C'M$, $A'K$, $B'L$.



Najdôležitejšie na riešení bolo všimnúť si to, že kolmice na BC, CA, AB v bodoch K, L, M sa dajú zostrojiť pomocou stredovej súmernosti so stredom S. Kto na toto prišiel, dokončil tento príklad bez akýchkoľvek problémov. Ostatným prajem, aby nezúfali a pracovali ďalej na svojom Sherlockovskom pozorovacom umení ďalej.

6. Opravovali: Darko Gál a Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 16**
Najoriginálnejší riešitelia: Tomáš Kocák

Milí naši riešitelia. Som rád, že vám nerobí problém zamýšľať sa nad problémom, ktorý sme vám zadali, ale nedá mi nespomenúť, že najskôr je potrebné úlohu dobre (ak nie dokonale) pochopiť a zistiť, o čo v nej vlastne ide.

Mám na mysli fakt, že časť riešení, ktoré prišli sa zamerali na jedno jediné konkrétne číslo n a v rámci toho si ešte sami zvolili rozmiestnenie kamienkov. Ale úlohou bolo dokázať (to slovko podčiarkujem), že pre každé prirodzené číslo n a pre akékoľvek rozmiestnenie kamienkov sa nám podarí dostať aspoň jeden kamienok do pravého horného rohu.

Časť z vás prehlásila, že najhoršou situáciou bude, keď všetky kamienky umiestnime do ľavého dolného rohu a pokračovali v dôkaze úlohy pre túto „najhoršiu" situáciu. Ale prečo by to mala byť najhoršia situácia? A aj keby bola (čo teda určite nie je), nemyslíte, že by za zmienku stálo, prečo je každé ďalšie rozmiestnenie kamienkov výhodnejšie?

A ešte jedna drobnosť, ktorá je pri riešení dôkazových úloh asi najdôležitejšia: Dôkaz nie je korektný, ak úporne tvrdíme, že dokazovaná hypotéza platí. Máme niekoľko typov „dôkazov" (priamy, sporom, indukciou, …) a žiaľ „dôkaz" úporným tvrdením nie je dôkaz. Jednou z najvýhodnejších ciest (nie však jedinou) bol dôkaz matematickou indukciou. Vidíte ho tam? Tak hľadajte … Veľa zdaru.

7. Opravoval: Riki Gál **Počet riešiteľov: 16**

Neviem, či z obavy, že ide o 7. príklad, alebo z toho, že ste nevedeli, ako začať, sa do tejto úlohy pustilo len 16 z vás. Preto naznačím pár krokov z riešenia.

Vychádzajme z predpokladov: $n \mid p-1$, a z toho teda máme, že $n \leq p-1$ (funguje táto úvaha pre každé prirodzené číslo p?). Ďalší predpoklad po rozpísaní je $p \mid (n-1)(n^2+n+1)$. Tu si uvedomme, že p je prvočíslo. A teda $p \mid n-1$, no v tom prípade $p \leq n-1$ (využitím predpokladu zo zadania, že $n > 1$), čo je spor s prvým predpokladom, a teda nutne

$$p \mid n^2+n+1. \tag{$*$}$$

Preto existujú prirodzené čísla a, b, pre ktoré platí:

$$p-1 = a \cdot n,\ a \in \mathbb{N} \tag{1}$$

$$n^2+n+1 = b \cdot p,\ b \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Vyjadrením p zo vzťahu (1) a dosadením do vzťahu (2) poľahky dostaneme, že

$$b \cdot a \cdot n + b = n^2 + n + 1, \tag{3}$$

a z toho teda porovnaním zvyškov po delení číslom n vo vzťahu (3)

$$b = c \cdot n + 1, \ c \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Dosadením vzťahu (4) do vzťahu (3) získame vzťah

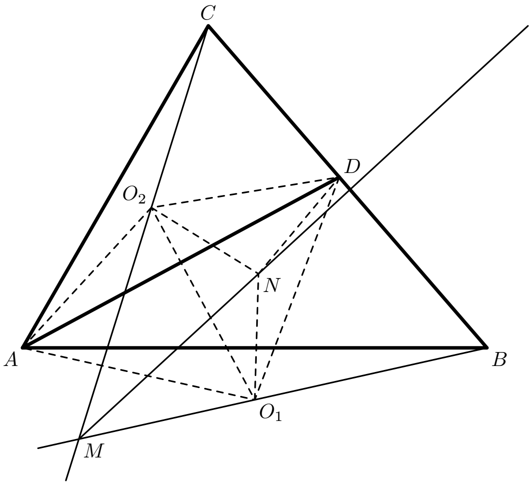
$$a \cdot c \cdot n + a + c = n + 1. \tag{5}$$

Pre $c \geq 1$ dostávame (uvedomiac si, že i $a \geq 1$), že ľavá strana vzťahu (5) $\geq n+2$, čo je spor, pretože vzťah (5) platí. Odtiaľ nutne $c = 0$, $b = 1$, a teda

$$p = n^2 + n + 1. \tag{6}$$

A práve tento vzťah nás poľahky dovedie do cieľa, pretože jeho dosadením do $4p - 3$ zistíme, že $4p - 3 = (2n + 1)^2$.
Vaša najčastejšia chyba spočívala v tom, že zo vzťahu ($*$) ste rovno usúdili, že platí (6), avšak bez dôkazu. Tak nabudúce pozor na to.

8. Opravoval: Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 4**
Najoriginálnejší riešitelia: Miroslav Baláž
Tak táto úloha bola ťažká (prišli len 4 riešenia), no nie nevyriešiteľná (jedno z nich bolo veľmi pekné, môžete raz hádať ktoré). Bola to typická ťažká geometrická úloha – je zadaná kopa všelijakých bodov, priamok a kružníc a našou úlohou je medzi nimi objaviť niečo špeciálne. Navyše, v tejto úlohe je nejaký bod pohyblivý a iný bod vraj má byť pevný. Čo to vlastne znamená, pohyblivý bod, pevný bod? Je to ten Archimedov pevný bod, pomocou ktorého chcel pohnúť Zemou?
V nasledujúcich riadkoch skúsim napísať pár tipov a trikov, ako si poradiť s takouto úlohou.



Ak je zadané, že bod D je pohyblivý bod vnútri strany BC zadaného trojuholníka ABC, tak znamená to asi toľko, že musíme rátať s tým, že bod D by mohol byť úplne hocikde vnútri danej úsečky. Potom aj poloha bodov O_1, O_2, M a N záleží na polohe bodu D, dalo by sa povedať, že tieto body sa pohybujú spolu s bodom D. Rovnako sa (asi) mení aj poloha priamky MN v závislosti od polohy bodu D. Našou úlohou je ale dokázať, že táto (pohyblivá) priamka prechádza pevným bodom, teda že existuje nejaký bod, v ktorom sa všetky priamky MN (pre všetky možné polohy bodu D) pretínajú.
Keď už sme si vysvetlili neznáme pojmy v zadaní, skúsme sa pohnúť aspoň trocha v riešení danej úlohy. Keďže je to osmička, asi sa nebude dať len tak z hlavy vyriešiť na kolene na pošte v pondelok večer pár minút pred záverečnou. Predpokladajme teda, že ešte máme dosť času, takže sa s úlohou môžeme troška pohrať.
Jedna z najdôležitejších vecí pri riešení geometrických úloh je vhodný obrázok. Často sa oplatí si obrázky dokonca narysovať. V tomto prípade to dopadne napríklad tak, ako na prvom obrázku.
Nesmieme byť netrpezliví a úlohu chcieť vyriešiť na prvý pokus. Skúsme sa v obrázku najprv len tak hrabať, namiesto toho, aby sme hneď pátrali po nejakom pevnom bode, ktorým prechádza priamka MN. (Nevieme čo je to za bod, takže to môže byť hocičo – od známych pevných bodov ako stred opísanej alebo vpísanej kružnice alebo priesečník výšok až po všelijaké prapodivné ťažko definovateľné ale pevné body.)

Čo sa z obrázka dá vyhrabať? Často sú to napríklad zhodné úsečky, zhodné uhly, inak súvisiace uhly (obvodový a stredový), trojuholníky so špeciálnymi vlastnosťami (pravouhlé, rovnoramenné, zhodné, podobné, atď.), štvoruholníky so špeciálnymi vlastnosťami (tetivové, dotyčnicové) a podobne. V tomto konkrétnom obrázku sa dá zbadať napríklad toto (sledujte pozorne obrázok pri jednotlivých tvrdeniach a uistite sa, že viete odkiaľ sa vzali):

a) $|O_1A| = |O_1B| = |O_1D|$ (polomer kružnice opísanej $\triangle ABD$),

b) $|O_2A| = |O_2C| = |O_2D|$ (polomer kružnice opísanej $\triangle ACD$),

c) $|O_1N| = |O_2N| = |DN|$ (polomer kružnice opísanej $\triangle O_1O_2D$),

d) množstvo rovnoramenných trojuholníkov, napr. ACO_2, ABO_1, O_1O_2N,

e) O_1O_2 je os úsečky AD, a teda $O_1O_2 \perp AD$,

f) trojuholníky AO_1O_2 a DO_1O_2 vyzerajú byť zhodné...

g) trojuholník AO_1B sa zdá byť podobný s trojuholníkom AO_2C...

h) trojuholník AO_1O_2 sa zdá byť podobný s trojuholníkom ABC...

i) trojuholník AO_1O_2 sa zdá byť zhodný s trojuholníkom MO_2O_1...

Mohli by sme vysloviť aj niekoľko ďalších odvážnych hypotéz, ktoré nám obrázok ponúka. Pri každej z nich by sme sa ale mali predvedčiť, či aj naozaj platí. Obrázky totiž môžu niekedy vyvolať klamlivé dojmy, pričom čím lajdáckejšie načrtnutý obrázok, tým viac nepravd sa nám bude snažiť vnútiť. Hypotézy, ktoré sa nám podarí overiť, budeme volať tvrdenia. Niektoré z týchto tvrdení budú možno zbytočné, ale človek nikdy nevie, čo sa mu kedy môže zísť (a za čo bude opravovateľ prideľovať body). Takže poďme na to:

Trojuholníky AO_1O_2 a DO_1O_2 naozaj zhodné sú, napríklad podľa vety *sss*.

Je trojuholník AO_1B podobný s trojuholníkom AO_2C? Už vieme, že sú oba rovnoramenné. Aby sme dokázali, že sú podobné, stačí ukázať, že majú jeden zhodný uhol. (Prečo?) Skúsme uhly v trojuholníkoch AO_1B a AO_2C nejako vyjadriť. Označme uhly v $\triangle ABC$ štandardne α, β a γ. Poloha bodov O_1 a O_2 závisí od polohy pohyblivého bodu D, takže budeme potrebovať ešte (aspoň) jeden uhol nejako označiť. Označme teda uhol ADC ako φ. Potom z vety o obvodovom a stredovom uhle dostávame, že $|\sphericalangle AO_2C| = 2\varphi$.

Na druhej strane $|\sphericalangle ADB| = 180° - \varphi$. Potom nekonvexný stredový uhol AO_1B prislúchajúci tupému obvodovému uhlu ADB má dvojnásobnú veľkosť, čiže $360° - 2\varphi$, a teda $|\sphericalangle AO_1B| = 2\varphi$. Trojuholníky AO_1B a AO_2C sú naozaj podobné, intuícia nás nesklamala. (Za takýto objav sa už možno body začnú sypať). Čo z toho vyťažiť ďalej?

Je trojuholník AO_1O_2 podobný s trojuholníkom ABC? Vyzerá to tak, ale obrázok môže klamať. Asi najpriamejšia cesta, ako dokázať podobnosť dvoch trojuholníkov, je ukázať zhodnosť dvoch párov odpovedajúcich si uhlov. Tak poďme na to. Uhol AO_2D je stredový k obvodovému uhlu ACD, a teda má dvojnásobnú veľkosť. Keďže $|\sphericalangle ACD| = \gamma$, tak $|\sphericalangle AO_2D| = 2\gamma$. Priamka O_1O_2 rozdeľuje uhol AO_2D na dva zhodné uhly (rozmyslite si prečo!), takže $|\sphericalangle AO_2O_1| = \gamma$. Sláva, dva odpovedajúce si uhly majú rovnakú veľkosť. Verím, že sami viete nájsť podobné zdôvodnenie, prečo aj uhly ABC a AO_1O_2 majú rovnakú veľkosť. Trojuholníky AO_1O_2 a ABC sú teda naozaj podobné (a bodíky pribúdajú, hehehe).

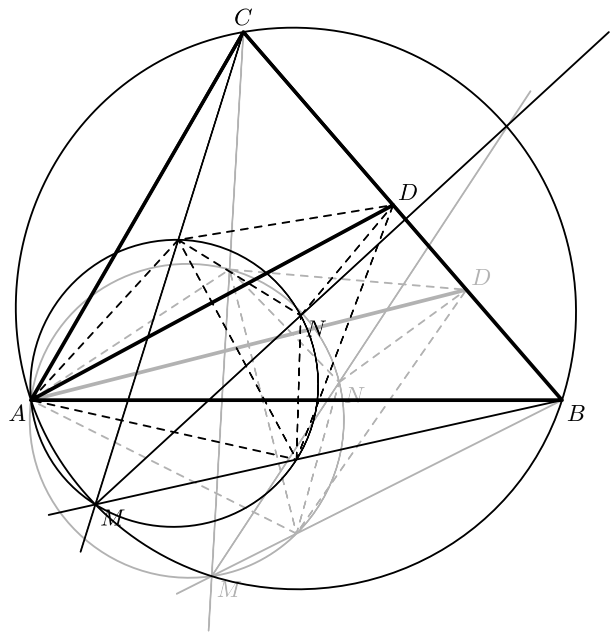
Skúste sami použiť vzťahy medzi obvodovými a stredovými uhlami do tretice v trojuholníkoch ABD a ACD na to, aby ste ukázali, že $|\sphericalangle BMC| = 60°$. Pomôžem, skúste najprv vyjadriť veľkosti uhlov MCB a MBC pomocou α, β, γ a φ, a potom hľadaný uhol dopočítať (ako doplnok do 180°).

Prezradím, že trojuholníky AO_1O_2 a MO_2O_1 zhodné nie sú, napriek tomu, že jeden pár odpovedajúcich si uhlov má rovnakú veľkosť (60°).

Na základe toho, že uhly $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BMC| = 60°$, dostávame, že body A, B, C a M ležia na jednej kružnici. Bod M leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC bez ohľadu na to, kde leží bod D! Takže keď pohybujeme bodom D po strane BC, tak bod M sa pohybuje po opísanej kružnici, lepšie povedané po jej časti. (Ktorej? Narysujte si do jedného obrázka viac rôznych polôh bodu D a uvidíte!)

Ako je to s bodom N? O ňom sme vlastne zatiaľ nič nevypátrali. Je to stred kružnice opísanej

trojuholníku O_1O_2D, môžeme teda zase skúsiť využiť obvodové a stredové uhly. Jeden uhol v trojuholníku O_1O_2D má veľkosť určenú presne, nezávisí od polohy bodu D. Ktorý to je? Správne, $|\sphericalangle O_1DO_2| = 60°$. Preto $|\sphericalangle O_1NO_2| = 120°$. Trojuholník O_1NO_2 je rovnramenný, vieme teda dorátať aj veľkosť zvyšných dvoch uhlov, je to $30°$.
Pozrime sa lepšie na uhly, ktoré poznáme. Veľkosti uhlov O_1NO_2 a O_1MO_2 sú $60°$ a $120°$, čo je spolu $180°$. Náhoda? Na čo je to dobré? Sláva, našli sme ďalšiu štvoricu bodov ležiacich na jednej kružnici, tentoraz na základe vzťahu, že súčet protiľahlých uhlov v tetivovom štvoruholníku je $180°$. Potom ale vieme dorátať veľkosti uhlov O_1MN a NMO_2. (Viete?) A nie je náhoda, že oba vyjdú zhodne po $30°$! Dostávame, že priamka MN je osou uhla BMC! No nie je to prekvapenie? Kto by to bol na začiatku tušil…
Akým pevným bodom teda táto priamka vždy prechádza? Skúste pošpekulovať sami, narysujte si možno aj viac polôh bodu D.



Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Copycentrum PERGAMON
- Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika, Košice
- Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice

Názov: STROM — korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2006 • Zimný semester 31. ročníka (2006/2007)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`