



Milí riešitelia a prvoriešitelia,

v rukách držíte nové zadania **STROMu**. Prichystali sme pre vás dve série zaujímavých úloh. Teraz je na každom z vás ako si s nimi poradí. Začíname od nuly, a teda každý ma rovnakú šancu uspieť. Okrem dobrého pocitu, že ste sa niečo nové pri riešení úloh naučili, na tých úspešných na jeseň čaká sústredenie. Pre tých, čo sa snažili v zime, máme potešujúcu správu, že sa stretneme na sústreďení od soboty 15. marca do štvrtka 20. marca v Kežmarských Žlaboch a zažijeme spolu skvelý týždeň. Prajeme vám veľa sily pri riešení úloh letnej časti a ako pochúťku si každý týždeň vychutnajzte POW o ktorom sa dozviete viac trochu nižšie.

Vaši **STROM**isti

Problem of the week

Tak veru, čítate dobre. Nejaká matematika tu bude opäť každý týždeň. A to nie hocijaká, ale interaktívna. Od 3. marca na stránke <http://seminar.strom.sk/pow> nájdete každý týždeň jednu novú úlohu. Pravidlá POWu v letnej časti roku 2008 sa oproti predošlej trochu zmenili.

Riešenie úloh posielajte mailom na adresu pow@strom.sk, s predmetom spravy v tvare POW {poradové číslo úlohy} {meno a priezvisko} (napr. POW1 Jozef Mrkva), v tele spravy uveďte vaše riešenie (spravidla je to číslo).

Za správne riešenie každej úlohy môžete získať 1 bod. Ak pošlete riešenie úlohy v týždni v ktorom bola zadaná, dostanete za správne riešenie 2 body. Ak bude vaše riešenie jedno z prvých piatich správnych riešení v daný týždeň, získate bod navyše, čiže spolu 3 body. Za nesprávnu odpoveď dostanete 0 bodov. Riešenie jednej úlohy je možné poslať len raz.

Úlohy z predošlých týždňov budú na webovej stránke zapísane v archívnom súbore, kde sa postupne budú pridávať jednotlivé úlohy daného ročníka; bude ich teda možné riešiť až do skončenia súťaže. Počet získaných bodov za jednotlivé úlohy bude aktualizovaný raz týždenne, vždy pri zverejnení novej úlohy. Koniec letnej časti POW je o polnoci v nedeľu 29. júna.

Najlepších z vás čaká prekvapenie.

Math jokes

Q: Why do mathematicians, after a dinner at a Chinese restaurant, always insist on taking the leftovers home?

A: Because they know the Chinese remainder theorem!

Teacher: "Who can tell me what 7 times 6 is?"

Student: "It's 42!"

Teacher: "Very good! - And who can tell me what 6 times 7 is?"

Same student: "It's 24!"

That math prof's marriage is falling apart!"

"No wonder! He's into scientific computing - and she's incalculable!"

Pokyny pre riešiteľov

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci z nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov.

Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeníach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete poselať poštou alebo e-mailom, no nie osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo nedokážeme prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Uvítame riešenia napísané na počítači, no nie je to nutné. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ
STROM
Jesenná 5
041 54 Košice.

Riešenia e-mailom posielajte do polnoci v deň termínu na e-mailovú adresu riesenia@strom.sk. Ich prijatie bude potvrdené e-mailom. Preferujeme súbory vo formáte PDF. Každú úlohu posielajte osobitne a do predmetu e-mailu napíšte (bez diakritiky) Uloha 1, respektíve Uloha 2, respektíve Uloha 3, respektíve Uloha 4. Technické problémy na našej či vašej strane nie sú dôvodom na akceptovanie riešení doručených po termíne.

S prvou sériou, ktorej riešenia nám posielate, pošlite vyplnenú **príhlášku**. Riešenie každej úlohy píšete na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail strom@strom.sk, prostredníctvom debaty na našej stránke alebo osobne.

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do poradia sa započítavajú všetky štyri úlohy + úloha podľa ročníka riešiteľa.

Prvákom sa do poradia navyše započítava najlepšie vyriešená úloha.

Druhák sa do poradia navyše započítava druhá najlepšie vyriešená úloha.

Tretiak sa do poradia navyše započítava tretia najlepšie vyriešená úloha.

Štvrták sa do poradia navyše započítava najhoršie vyriešená úloha.

Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhľime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešení zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrovaná.

Hlasovanie úloh závisí od zaujímavosti a jedinečnosti vášho riešenia. Radosť vám môže spraviť 1 hlas (prehľadné, jasné riešenie), alebo 2 či 3 hlasy za výnimočné a originálne nápady. Ak nájdete riešenie v literatúre, kladné hlasy si nepočítate. Naopak, hrôzu budiace riešenia (výzorom, zložitou) získajú -1 hlas. Horšie obídu tí, ktorým za odpisovanie strhneme body. Po ich vydelení počtom odpisujúcich dostanú -3 hlasy, po veľkom odpisovaní je to -5 hlasov. Tak hor sa do hľadania pekných riešení, zabudnime na odpisovanie a hrajme sa s matematikou! Riešitelia s najvyšším počtom hlasov budú na konci semestra odmenení.

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia a členovia minimálne prvých troch najlepších družstiev z matboja, ak sa v príslušnom polroku koná. Prípadní ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROMu** a matboja; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Na sústredenie však nebudú vôbec pozvaní riešitelia, ktorí získali v príslušnom semestri -3 alebo menej hlasov.

Zadania úloh letného semestra 32. ročníka

1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **6. 3. 2008**

1. V poslednej dobe nadobudol veľkú popularitu japonský hlavolam *SUDOKU*. Klasické sudoku je tabuľka veľkosti 9×9 rozdelená na 9 štvorcov veľkosti 3×3 , pričom v niektorých políčkach tabuľky sú vpísané čísla od 1 po 9. Takúto tabuľku nazvime *zadanie*. Úlohou je doplniť do všetkých ostatných políčok čísla od 1 po 9 tak, aby v každom stĺpci, riadku, štvorci 3×3 bolo každé číslo práve raz. Takto vyplnenú tabuľku nazvime *riešením* daného zadania.

Uvažujme menšie a jednoduchšie sudoku: Tabuľku veľkosti 4×4 rozdelenú na 4 štvorce veľkosti 2×2 chceme vyplniť číslami od 1 po 4 tak, aby v každom riadku, každom stĺpci, každom štvorci 2×2 bolo každé číslo práve raz.

a) Koľko existuje všetkých možných riešení takéhoto sudoku 4×4 ?

b) Nájdite také zadanie sudoku veľkosti 4×4 , v ktorom sú vpísané len 4 čísla, a pritom má jediné riešenie.

c) Dokážte, že ak zadanie sudoku 4×4 má jediné riešenie, tak sú v ňom už vpísané aspoň 4 čísla (alebo ekvivalentne: dokážte, že ak sú zadané najviac tri čísla, tak také sudoku buď nemá riešenie alebo má viac ako jedno riešenie).

2. a) Jožko si raz dlhú chvíľu v škole krátil tým, že sa snažil vyplniť tabuľku 5×5 štvorčekov takýmito útvarmi:



(pričom ich mohol ľubovoľne otočiť alebo prevrátiť, nesmeli sa však prekrývať) Okamžite prišiel na to, že sa mu minimálne 1 políčko musí zvýšiť. Nie vždy to však bolo to isté políčko. Viete Jožkovi povedať, ktoré políčka to môžu byť?

b) Ferko si všimol Jožkovu zábavku a hneď ju začal riešiť. Keďže sa mu Jožkova úloha zdala príliš ľahká, tak on si zobral ľubovoľnú tabuľku $n \times n$ štvorčekov. Koľko políčok sa najmenej Ferkovi zvýši? Ktoré políčka to môžu byť?

Svoje tvrdenia nezabudnite poriadne zdôvodniť.

3. a) Paľko si do zošita píše postupnosti čísel. Začne celým číslom 0, a potom k nemu pripočíta nejaké prirodzené číslo a . Potom znova pripočíta a , a znova, a znova. Paľkova postupnosť teda vyzerá takto: $0, a, 2a, 3a, 4a, \dots$

Jožko si zvolil prirodzené číslo b a do zošita si začal písať zvyšky Paľkových čísel po delení číslom b (presne v tom istom poradí, v akom mal napísané čísla Paľko). Ukážte, že bez ohľadu na to, aké čísla si chlapci zvolia, bude od istého miesta Jožkova postupnosť obsahovať presne tie isté čísla, ako na začiatku (teda je periodická).

b) Aj Samko si začal písať do zošita čísla, ale namiesto sčítania násobí a namiesto nuly začína jednotkou. Takže jeho postupnosť vyzerá takto: $1, a, a^2, a^3, \dots$

Mirko si myslí, že keď si zvolí hocijaké prirodzené číslo b , začnú sa zvyšky Samkových čísel po delení číslom b tiež od istého miesta opakovať. Má Mirko pravdu?

c) Pani učiteľka si všimla hru chlapcov, a povedala: „Nech $P(x)$ je ľubovoľný polynóm s celočíselnými koeficientami. Vytvoríme postupnosť čísel

$$P(1)^1, P(2)^2, \dots, P(n)^n, \dots$$

Čo viete o takejto postupnosti povedať? Dežko si hneď všimol, že nech si zvolí hocikaké prirodzené číslo b , zvyšky jednotlivých členov tejto postupnosti po delení číslom b tvoria periodickú postupnosť. Dokážte, že Dežko má pravdu.

4. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s priesečníkom výšok V .
- Označme V_a, V_b, V_c po poradí obrazy priesečníka výšok v osových súmernostiach podľa strán BC, CA, AB . Dokážte, že body V_a, V_b, V_c ležia na kružnici opísanej trojuholníku ABC .
 - Označme U_a, U_b, U_c po poradí obrazy priesečníka výšok v stredových súmernostiach podľa stredov strán BC, CA, AB . Dokážte, že body U_a, U_b, U_c ležia na kružnici, ktorej polomer je rovnaký ako polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC .
 - Označme U_a, U_b, U_c po poradí obrazy priesečníka výšok v stredových súmernostiach podľa stredov strán BC, CA, AB . Dokážte, že trojuholníky $U_a U_b U_c$ a ABC sú zhodné.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **21. 4. 2008**

- Dada dostala v Nórsku úžasnú kalkulačku. Ak zadáte prirodzené číslo n a stlačíte tlačidlo označené symbolom $*$, v kalkulačke to zarachotí a na displeji sa objaví prirodzené číslo, nazvime ho n^* . Dada s pomocou slovníka a návodu na použitie kalkulačky zistila, že s číslom n sa deje toto: Prirodzené číslo n sa prevedie do dvojkovej sustavy. Počet jednotiek a počet núl (za prvou jednotkou) v získanom čísle sa zväčší o jedna. Získané dve čísla sa spolu vynásobia, výsledný súčin sa objaví na displeji. Napríklad 13 ($8 + 4 + 1$) v dvojkovej sústave je 1101 , takže 13^* je $(3 + 1)(1 + 1)$ čiže 8 . Keď zadáme $8 = 1000_2$, kalkulačka vyráta $8^* = (1 + 1)(3 + 1)$, čiže opäť 8 .
 - Zistite 2008^* .
 - Zistite, pre koľko prirodzených čísel n (vrátane 2008) platí $n^* = 2008^*$.
 - Zistite, pre koľko prirodzených čísel n platí $n^* = n$. Ktoré sú to čísla?
- Majme trojuholník ABC . Nech P je priesečník osi uhla BAC a osi strany BC . Ďalej nech body K, L, M sú postupne päty kolmíc z bodu P na priamky AB, BC, CA . Dokážte, že
 - trojuholníky PKB a PMC sú podobné,
 - štvoruholník $ABPC$ je tetivový,
 - body K, L, M sú kolineárne.
- Fibonacciho postupnosť (F_n) je definovaná vzťahom $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre $n \geq 1$ a počiatočnými hodnotami $F_1 = 1, F_2 = 1$.
 - Dokážte, že existuje Fibonacciho číslo deliteľné číslom 2008 .
 - Existuje aritmetická postupnosť, ktorá neobsahuje žiadne Fibonacciho číslo?
- Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s priesečníkom výšok V .
 - Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABV, BCV, CAV sú zhodné.
 - V rovine sú dane tri zhodné kružnice prechádzajúce bodom H . Označme priesečníky dvojíc týchto kružníc A, B, C (tieto body sú rôzne od bodu H). Dokážte, že bod H je ortocentrom trojuholníka ABC .
 - Daná je kružnica k a jej tetiva AB . Po jednom z oblúkov tejto kružnice sa pohybuje bod C rôzny od bodov A a B . Po akej dráhe sa pohybuje priesečník výšok trojuholníka ABC ?

Za podporu a spoluprácu dakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Ústavu matematických vied Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach
- Copycentrum Pergamon s.r.o.

Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 3 • Február 2008 • Letný semester 32. ročníka (2007/2008)
Internet:	http://seminar.strom.sk
E-mail:	strom@strom.sk
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	http://www.strom.sk
E-mail:	zdruzenie@strom.sk