STROM
Korešpondenčný matematický seminár

## *Milí naši riešitelia,*

Tak, a máme po prvej sérii úloh a pred vami je ešte zvládnuť druhú sériu. Aby ste po jej vypočítaní nevyšli z cviku, máme tu Matboj. Aj tentokrát zabezpečí dvanástim z vás sústredenie, aj keď neriešili **STROM**ček. Že ste už prihlasení? Tak sa na vás tešíme, uvidíme sa 25. apríla. No a hneď deň na to bude klub. O tom, čo vas na ňom čaká, sa dozviete na našej–vašej stránke.

## *Math jokes*

Q: How does one insult a mathematician?
A: You say: "Your brain is smaller than any $\varepsilon > 0$!"

A woman in a bar tries to pick up a mathematician.
"How old, do you think, am I?" she asks coyly.
"Well - 18 by that fire in your eyes, 19 by that glow on your cheeks, 20 by that radiance of your face, and adding that up is something you can probably do for yourself…"

Q: Why do you rarely find mathematicians spending time at the beach?
A: Because they have sine and cosine to get a tan and don't need the sun!

Theorem: Every positive integer is interesting.
Proof: By contradiction, assume that there exists an uninteresting positive integer. Then there must be a smallest uninteresting positive integer. But that's pretty interesting! Therefore a contradiction!

# Riešenia 1. série úloh letného semestra 32. ročníka

**1.** V poslednej dobe nadobudol veľkú popularitu japonský hlavolam *SUDOKU*. Klasické sudoku je tabuľka veľkosti $9 \times 9$ rozdelená na 9 štvorcov veľkosti $3 \times 3$, pričom v niektorých políčkach tabuľky sú vpísané čísla od 1 po 9. Takúto tabuľku nazvime *zadanie*. Úlohou je doplniť do všetkých ostatných políčok čísla od 1 po 9 tak, aby v každom stĺpci, riadku, štvorci $3 \times 3$ bolo každé číslo práve raz. Takto vyplnenú tabuľku nazvime *riešením* daného zadania.
Uvažujme menšie a jednoduchšie sudoku: Tabuľku veľkosti $4 \times 4$ rozdelenú na 4 štvorce veľkosti $2 \times 2$ chceme vyplniť číslami od 1 po 4 tak, aby v každom riadku, každom stĺpci, každom štvorci $2 \times 2$ bolo každé číslo práve raz.
a) Koľko existuje všetkých možných riešení takéhoto sudoku $4 \times 4$?
b) Nájdite také zadanie sudoku veľkosti $4 \times 4$, v ktorom sú vpísané len 4 čísla, a pritom má jediné riešenie.
c) Dokážte, že ak zadanie sudoku $4 \times 4$ má jediné riešenie, tak sú v ňom už vpísané aspoň 4 čísla (alebo ekvivalentne: dokážte, že ak sú zadané najviac tri čísla, tak také sudoku buď nemá riešenie alebo má viac ako jedno riešenie).

**Opravovali: Feri Kardoš a Tomáš Kocák** **Počet riešiteľov: 28**

**<u>Riešenie:</u>**

V riešení využijeme nasledovnú myšlienku: Ak je vyplnený ľavý horný a pravý dolný štvorec, tak sudoku buď nemá riešenie, alebo sa dá dokončiť jednoznačným spôsobom. Totiž pre zvyšné dva štvorce každé z čísel 1, 2, 3 a 4 môžeme vpísať len do jedného políčka, pretože jeden riadok a jeden stĺpec už dané číslo obsahuje.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | | |
| $c$ | $d$ | | |
| | | | |
| | | | |

Najprv vypočítame počet možností, ako sa dá vyplniť ľavý horný štvorec $2 \times 2$. Na vyplnenie prvého políčka máme 4 možnosti. Ak chceme vyplniť druhé políčko, tak máme už len 3 možnosti, pretože číslo, ktoré sme už raz použili nemôžeme použiť opäť. Na vyplnenie tretieho políčka máme už len 2 možnosti, pretože už sme použili dve čísla. Na vyplnenie posledného políčka máme už len jednu možnosť. To je spolu $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ možností. Vyplňme si preto ľavý horný štvorec ako je to na obrázku. Za písmená $a$, $b$, $c$ a $d$ môžeme dosadiť čísla 1, 2, 3 a 4 v ľubovoľnom poradí.

Teraz sa skúsme pozrieť na to, ako sa dá vyplniť pravý dolný štvorec. Ak by sme ho mohli vyplniť ľubovoľne, počet možností by bol znova 24. Nie každá z nich však určuje riešenie sudoku.

V ľavom hornom štvorci sú v prvom riadku čísla $a$ a $b$. Ak by v pravom dolnom štvorci boli čísla $c$ a $d$ v jednom stĺpci, potom by existovalo políčko, ktoré by bolo v rovnakom riadku ako čísla $a$ a $b$, a v rovnakom stĺpci ako čísla $c$ a $d$, teda na toto políčko by sme nemohli napísať žiadne číslo. Preto v pravom dolnom štvorci nemôžu byť čísla $c$ a $d$ v tom istom stĺpci. Ak sú čísla $c$ a $d$ v pravom dolnom štvorci v rôznych stĺpcoch, prvý riadok môžeme dokončiť jediným spôsobom – do daného políčka vpíšeme to z čísel $c$ a $d$, ktoré nie je v príslušnom stĺpci.

Analogicky, čísla $a$ a $b$ nemôžu byť v pravom dolnom štvorci v jednom stĺpci. Ak sú v rôznych stĺpcoch, druhý riadok vieme dokončiť jednoznačne.

Rovnakou úvahou sa vieme dopracovať k tomu, že čísla $b$ a $d$ ani čísla $a$ a $c$ nemôžu byť v pravom dolnom štvorci v jednom riadku. Ak sú čísla $b$ a $d$ (resp. $a$ a $c$) v pravom dolnom štvorci v rôznych riadkoch, je možné dokončiť prvý (resp. druhý) stĺpec jednoznačne.

Otázka preto znie, koľkými spôsobmi vieme vyplniť pravý dolný štvorec tak, aby čísla $c$ a $d$ (resp. $a$ a $b$) neboli v jednom stĺpci a čísla $b$ a $d$ (resp. $a$ a $c$) neboli v jednom riadku. Týchto možností je 12, sú vymenované na druhom obrázku.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $b$ | $a$ |
| $d$ | $c$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $d$ | $d$ | $c$ |
| $b$ | $a$ | $a$ | $b$ |

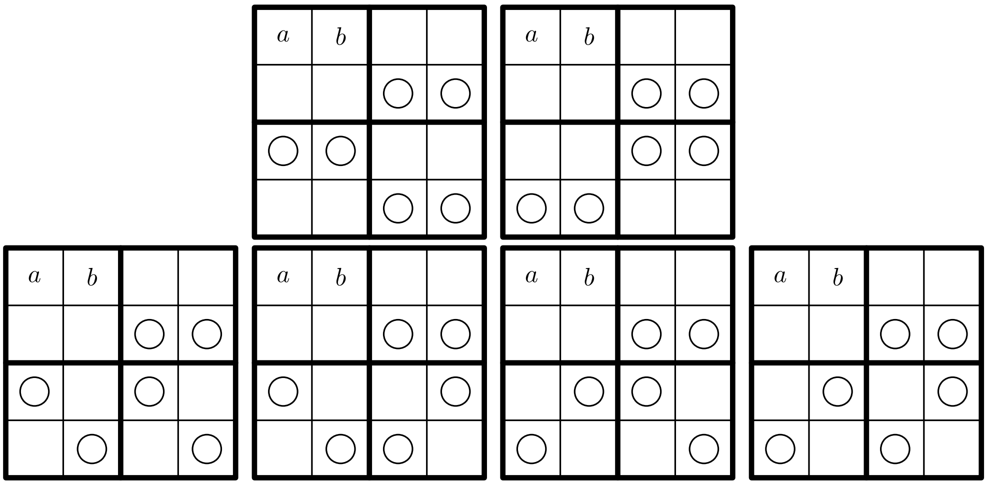
| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $b$ | $a$ |
| $c$ | $d$ | $d$ | $c$ |
| $c$ | $d$ | $d$ | $c$ |
| $a$ | $b$ | $b$ | $a$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $d$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $b$ | $d$ | $a$ |
| $c$ | $b$ | $d$ | $a$ |
| $a$ | $d$ | $b$ | $c$ |

Existuje 24 rôznych vyplnení ľavého horného štvorca a pre každé z nich existuje práve 12 možností ako vyplniť pravý dolný štvorec tak, aby sa jednoznačne dalo vyplniť celé sudoku. Preto existuje $24 \cdot 12 = 288$ riešení sudoku $4 \times 4$.

Iné riešenie časti a)

Nech v prvom políčku v prvom riadku je číslo $a$ (štyri možnosti) a v druhom políčku v prvom riadku je číslo $b$ (tri možnosti). Potom na treťom a štvrtom políčku v druhom riadku môžu byť len čísla $a$ a $b$. V posledných dvoch riadkoch nemôžu byť čísla $a$ a $b$ pod sebou, pretože v každom stĺpci je už práve jedno z týchto čísel. Preto existuje len 6 rôznych rozmiestnení čísel $a$ a $b$ v posledných dvoch riadkoch sudoku. Všetky možnosti sú znázornené na obrázkoch. Krúžok predstavuje jedno z čísel $a$, $b$.



Ak sa pozrieme na prvé dva obrázky, tak počet možností na ich vyplnenie je 8 (existujú dve možnosti na dokončenie ľavých dvoch štvorcov a 4 možnosti na vyplnenie pravých dvoch štvorcov). Počet možností na vyplnenie sudoku na ďalších štyroch obrázkoch je 2, pretože všetky čísla $a$ a $b$ sú jednoznačne určené a pri zvyšných číslach si môžeme zvoliť len poradie čísel $c$, $d$ v niektorom štvorci $2 \times 2$; ostatné sú už potom jednoznačne určené. To je spolu $2 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 24$ možností na vyplnenie všetkých sudoku, ak máme zadané čísla $a$ a $b$ v prvom a druhom políčku v prvom riadku. Počet možností na vyplnenie týchto miest je $3 \cdot 4 = 12$, a preto počet riešení sudoku bude $12 \cdot 24 = 288$.

Riešenie časti b)

Pri troche šťastia sa dalo nájsť vhodné zadanie jednoducho skúšaním. Ako príklady uvádzame nasledovné sudoku. Presvedčte sa sami, že naozaj majú jediné riešenie:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 4 | |
| | 3 | | |
| | | | 2 |
| 1 | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | |
| | | | |
| | | | |
| | | 1 | 3 |

Riešenie časti c)

Tvrdenie dokážeme sporom. Presnejšie, ukážeme, že ak sú zadané najviac tri čísla a sudoku má aspoň jedno riešenie, tak má viac ako jedno riešenie. Predpokladajme, že máme sudoku s najviac troma zadanými číslami, ktoré má riešenie. Je zrejmé, že sa stačí zaoberať takými sudoku, v ktorých sú zadané práve tri čísla.

Ak sú všetky zadané čísla v niektorom zo štvorcov, vieme doplniť len štvrté číslo v tomto štvorci a podľa časti a) má takéto zadanie 12 riešení, čo je viac než 1.

Nech sú v niektorom štvorci zadané dve čísla. Ak to náhodou nie je ľavý horný štvorec, ale niektorý iný, stačí takéto sudoku otočiť. Preto môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že v ľavom hornom štvorci sú zadané dve čísla.

V ďalšom nám viackrát pomôže nasledovné pozorovanie: Ak vymeníme napríklad prvý a druhý riadok (alebo prvý a druhý stĺpec), tak sa počet riešení sudoku nezmení. Je to preto, že takáto výmena neovplyvní ani jednu z vlastností sudoku. Štvorice čísel v každom riadku, stĺpci a štvorci $2 \times 2$ ostanú rovnaké, zmení sa len ich rozmiestnenie. Podobne môžeme vymeniť tretí a štvrtý riadok, resp. tretí a štvrtý stĺpec.

Ak je tretie zadané číslo v susednom štvorci, čiže všetky tri zadané čísla sú v prvom a druhom riadku (alebo v prvom a druhom stĺpci), tak výmenou tretieho a štvrtého riadku (resp. stĺpca) dostaneme druhé riešenie toho istého zadania, takže takéto zadanie má aspoň dve riešenia.

Ak sú dve zadané čísla v ľavom hornom štvorci a tretie zadané číslo je v pravom dolnom štvorci, na doplnenie ľavého horného štvorca máme dve možnosti (chýbajú v ňom dve čísla). Ak si pozrieme lepšie zoznam možností ako potom vyplniť pravý dolný štvorec, zbadáme, že pre každú možnosť, ako

v ňom môže byť zadané tretie číslo, existujú práve tri riešenia. Preto takéto zadanie má šesť riešení, čo je viac než 1.
Ostáva nám vyriešiť prípad, že tri zadané čísla sú v troch rôznych štvorcoch. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že žiadne číslo nie je zadané v pravom dolnom rohu.

Vhodnou výmenou riadkov a stĺpcov sa vieme dostať k situácii znázornenej na nasledovnom obrázku, kde každé z políčok označených $P_1$ až $P_8$ je prázdne.

| | | |
|---|---|---|
| | $P_3$ | $P_4$ |
| $P_2$ | $P_5$ | $P_6$ |
| $P_1$ | $P_7$ | $P_8$ |

Nech je dané jedno riešenie takéhoto zadania. Na políčkach $P_1$, $P_2$, $P_3$ a $P_4$ nemôžu byť štyri rôzne čísla (políčko v druhom riadku a druhom stĺpci by sa nedalo vyplniť). Takisto tam spolu nemôžu byť len dve čísla (potom by sa nedalo vyplniť napríklad políčko v prvom riadku a druhom stĺpci). Nech na políčkach $P_2$ a $P_3$ je to isté číslo $a$ a na políčkach $P_1$ a $P_4$ nejaké dve iné čísla $b$ a $c$. (Ak by neboli, tak sa vieme do takejto situácie dostať výmenou tretieho a štvrtého stĺpca a/alebo riadku.) Potom na políčku $P_8$ je určite číslo $a$. Na políčku $P_6$ môže byť buď $b$ alebo $d$.
Ak je na políčku $P_6$ číslo $b$, tak dostaneme aspoň dve riešenia sudoku, pretože stačí vymeniť čísla na políčkach $P_1$, $P_2$ a $P_6$, $P_8$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $c$ | | | $a$ | $c$ |
| $a$ | | $b$ | $\longrightarrow$ | $b$ | | $a$ |
| $b$ | | $a$ | | $a$ | | $b$ |

Ak je na políčku $P_6$ číslo $d$, tak na políčku $P_7$ je určite číslo $c$. Sudoku má opäť aspoň dve riešenia, druhé dostaneme tak, že vymeníme čísla na políčkach $P_3$, $P_4$ a $P_7$, $P_8$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $c$ | | | $c$ | $a$ |
| $a$ | | $d$ | $\longrightarrow$ | $a$ | | $d$ |
| $b$ | $c$ | $a$ | | $b$ | $a$ | $c$ |

Pre všetky možnosti ako môžu byť zadané tri čísla sme dostali, že ak takéto zadanie má nejaké riešenie, tak má aspoň dve riešenia, čo bolo treba dokázať.
Iné riešenie časti c)
Ukážeme, že na to, aby sme jednoznačne určili riešenie sudoku, potrebujeme aspoň štyri čísla.
Majme nejaké riešenie. Nech v prvom riadku v ľavom hornom štvorci sú čísla $a$ a $b$. Potom tieto čísla sú v druhom riadku v pravom hornom štvorci. Pozrime sa na polohu čísel $a$ a $b$ v dolných štvorcoch. Ak sú čísla $a$ a $b$ v ľavom aj pravom dolnom štvorci v tom istom riadku, potom aj čísla $c$ a $d$ sú vo všetkých štyroch štvorcoch v tom istom riadku. Aby sme jednoznačne určili polohu čísel $a$ a $b$ v ľavých dvoch štvorcoch, musí byť zadané aspoň jedno číslo $a$ alebo $b$. Podobne potrebujeme aspoň jedno $a$ alebo $b$ v pravých dvoch štvorcoch, a po jednom $c$ alebo $d$ v ľavých dvoch aj v pravých dvoch štvorcoch, spolu teda potrebujeme aspoň štyri čísla.
Nech čísla $a$ a $b$ v dolných dvoch štvorcoch nie sú v tom istom riadku. Nemôžu byť v jednom štvorci v tom istom stĺpci, pretože v každom stĺpci už je jedno $a$ alebo $b$. Preto sú v dolných štvorcoch čísla $a$ a $b$ v diagonálnej vzájomnej polohe. Nech v druhom riadku ľavého horného štvorca sú čísla $c$ a $d$. Je zrejmé, že čísla $a$ a $c$ sú v tom istom (prvom) stĺpci v ľavom hornom štvorci a sú v tom istom (druhom) stĺpci aj v ľavom dolnom štvorci. Aká je vzájomná poloha čísel $a$ a $c$ v pravom dolnom štvorci? Čísla $a$ a $c$ nemôžu byť v tom istom riadku, pretože v treťom aj v štvrtom riadku už je jedno z čísel $a$ a $c$. Nemôžu sa ani dotýkať rohom, pretože oproti číslu $a$ je určite číslo $b$. Preto sú čísla $a$ a $c$ v pravom dolnom štvorci v tom istom stĺpci, a teda sú v tom istom stĺpci aj v pravom hornom štvorci. Ak má byť jednoznačne daná poloha čísel $a$ a $c$ v horných (dolných) dvoch štvorcoch, musí v nich byť zadané aspoň jedno $a$ alebo $c$. Rovnako pre čísla $b$ a $d$ musia byť zadané aspoň dve čísla, spolu teda potrebujeme aspoň štyri čísla.

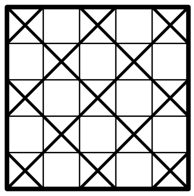
*Komentár:*
Časť a) nebola až taká jednoduchá, ako sa na prvý pohľad mohlo zdať. Svedčí o tom veľký počet nesprávnych riešení. Najčastejšie spomedzi chybných riešení bolo nasledovné:
Ľavý horný štvorec môžeme vyplniť $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ spôsobmi. Prvý riadok sa dá dokončiť dvoma spôsobmi, druhý riadok takisto dvoma, prvý stĺpec dvoma, druhý stĺpec dvoma, potom v pravom dolnom štvorci už nemáme nikde na výber, počet všetkých riešení je preto $4! \cdot 4 \cdot 4 = 384$.
Základný problém tohoto riešenia je v tom, že nie pre všetky možnosti sa dá pokračovať vo vypĺňaní sudoku, pozri vzorové riešenie. Takisto nie je pravda, že pre každú z možností ako vyplniť niektoré políčka je počet možností ako dovypĺňať ostatné políčka rovnaký. Za takéto riešenie sme udeľovali 2 zo 4 možných bodov za túto časť úlohy.
Časť b) nerobila vôbec žiadne problémy. Dali sa za ňu získať (v podstate zadarmo) 2 body.
Časť c) bola nepríjemná v tom, že si bolo treba sakra dávať pozor na to, aby ste v zozname vymenovaných možností na niečo nezabudli. A to sa stalo osudným v podstate každému. Ak si prečítate vzorové riešenie, nájdete v ňom niekoľko zlepšovákov, ako obísť zdĺhavé rozoberanie všetkých možností pomocou rozličných úvah. Každá z týchto úvah by sa nakoniec dala sformulovať ako „bez ujmy na všeobecnosti nech je to takto“. Slovné spojenie „bez ujmy na všeobecnosti“ znamená, že vyriešime jeden konkrétny prípad a všetky ostatné prípady sa buď dajú previesť na tento, alebo vyriešiť úplne rovnako. Ak to nie je úplne zjavné, treba v takýchto prípadoch vždy vysvetliť ako previesť ostatné prípady na ten jeden konkrétny, prípadne aspoň naznačiť, ako sa vyriešia ostatné prípady, v čom (a či vôbec) sa riešenie bude líšiť a podobne.

**2.** a) Jožko si raz dlhú chvíľu v škole krátil tým, že sa snažil vyplniť tabuľku $5 \times 5$ štvorčekov takýmito útvarmi:

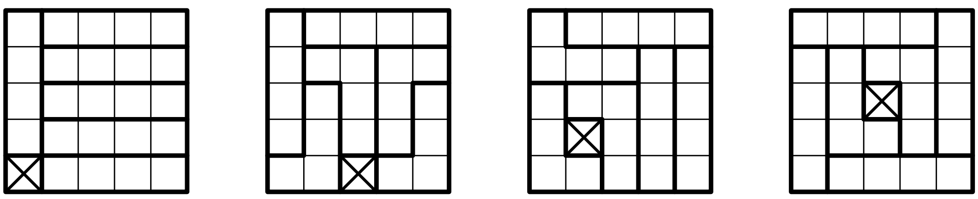
(pričom ich mohol ľubovoľne otočiť alebo prevrátiť, nesmeli sa však prekrývať). Okamžite prišiel na to, že sa mu minimálne 1 políčko musí zvýšiť. Nie vždy to však bolo to isté políčko. Viete Jožkovi povedať, ktoré políčka to môžu byť?
b) Ferko si všimol Jožkovu zábavku a hneď ju začal riešiť. Keďže sa mu Jožkova úloha zdala príliš ľahká, tak on si zobral ľubovoľnú tabuľku $n \times n$ štvorčekov. Koľko políčok sa najmenej Ferkovi zvýši? Ktoré políčka to môžu byť?
Svoje tvrdenia nezabudnite poriadne zdôvodniť.

**Opravoval: Marek Derňár** **Počet riešiteľov: 26**
<u>**Riešenie:**</u>

a) Po chvíľke skúšania môžeme prísť na to, že voľné políčko sa môže nachádzať na ľubovoľnom mieste označenom krížikom:

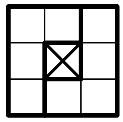


Takže máme 13 rôznych pozícií, o ktorých musíme dokázať, že naozaj môžu ostať neobsadené. Vzhľadom na symetriu obrázku nám stačí nakresliť umiestnenie útvarov iba pre 4 z týchto pozícií. (Pokiaľ by sme si túto symetriu neuvedomili, tak musíme nakresliť 13 rôznych obrázkov. Komu by sa to chcelo?) Pre každú z nich však už musíme načrtnúť príklad vypĺňania:

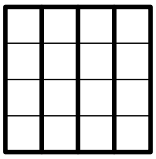


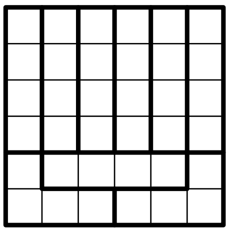
Vidíme, že keď budeme tieto obrázky postupne otáčať, tak sa voľné políčko naozaj dostane do každej z pozícií uvedenej na prvom obrázku.
Ostáva nám ešte dokázať, že žiadne ďalšie políčko prázdne zostať nemôže. Keďže pri vypĺňaní máme k dispozícii až dva rôzne tvary útvarov, tak vypisovanie všetkých možností by bolo priveľmi pracné, nehľadiac na to, že by sme ľahko mohli niektorú možnosť zabudnúť. Preto by sa hodilo nájsť nejaký ľahší spôsob dôkazu. Skúsenejší riešitelia už vedia, že cestou k úspechu pri podobných úlohách je vhodné ofarbenie tabuľky. Skúsme si túto tabuľku ofarbiť ako šachovnicu. Políčka označené krížikom budú čierne a ostatné budú biele. Potom každý z útvarov, ktorými túto tabuľku vypĺňame, zaberie 2 biele a 2 čierne políčka. Keďže máme dokopy 13 čiernych a 12 bielych políčok, tak pokiaľ sa nám zvýši iba jedno políčko, musí byť čierne. Tým pádom sme tvrdenie dokázali.

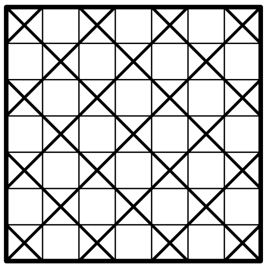
b) V tejto časti úlohy máme v podstate zistenia z časti a) zovšeobecniť pre ľubovoľnú tabuľku $n \times n$. Mnohí z vás začali ihneď skúmať zvyšok po delení čísla $n^2$ číslom 4, keďže obsah každého z tých útvarov je 4 štvorčeky. Takto zistili, že úlohu treba riešiť zvlášť pre $n$ párne a pre $n$ nepárne. Lepšie je ale najprv úlohu vyriešiť pre niekoľko prvých hodnôt čísla $n$:
- ak $n = 1$, potom do tabuľky nevieme umiestniť ani jeden z útvarov, čiže nám zvýši 1 políčko.
- ak $n = 2$, potom opäť nevieme umiestiť ani jeden z útvarov, čiže nám zvýšia 4 políčka.
- ak $n = 3$, potom nám zvýši najmenej jedno políčko, a môže ním byť iba to stredové: (skúste zdôvodniť, prečo žiadne iné políčko prázdne zostať nemôže)



- ak $n = 4$, tak vieme vyplniť úplne celú tabuľku napríklad ako na obrázku:
- pre $n = 5$ sme úlohu vyriešili v časti a).
- pre $n = 6$ vieme opäť celú tabuľku vypniť, napríklad:
- pre $n = 7$ nám zvýši minimálne 1 políčko, a to na podobných miestach ako pre $n = 5$:



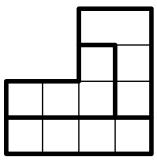


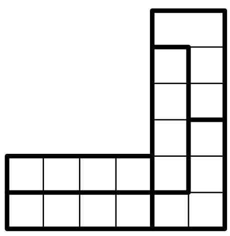


Z týchto zistení nám už nerobí problém zostaviť si hypotézu, že pre $n$ párne nám nezvýši ani jedno políčko a pre $n$ nepárne zvyšuje mininálne 1 na pozíciách podobných ako v časti a). Samozrejme nesmieme zabudnúť spomenúť špeciálne prípady $n = 1$, $n = 2$ a $n = 3$. (Väčšina z vás na tieto prípady úplne zabudla, keďže ste si prvé možnosti nevypísali.)

Poďme najprv túto hypotézu dokázať pre $n$ párne:
Potrebujeme ukázať, že ľubovoľná tabuľka $n \times n$ ($n$ párne, $n \geq 4$) sa dá vyplniť útvarmi zo zadania. Pre $n = 4$ sa nám to podarilo vyplniť.

Majme teraz tabuľku $n \times n$ ($n \geq 4$), ktorú vieme danými útvarmi vyplniť. Pridajme na spodok 2 riadky a k jej pravému okraju 2 stĺpce. Teraz sa pozrime na to, či tieto dva pridané riadky a stĺpce vieme vyplniť. Na to nám však stačí ukázať vypĺňanie pre nasledujúce 2 časti z obrázku:

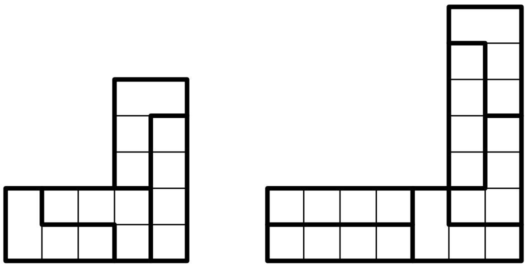




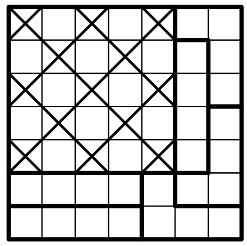
Zvyšok týchto riadkov (stĺpcov) môžeme doplniť pomocou útvarov $1 \times 4$. Tým sme však matematickou indukciou našu hypotézu dokázali.
Mohli sme taktiež využiť to, že tvrdenie máme ukázané pre $4 \times 4$ aj pre $6 \times 6$, a potom dokazovať, že to platí aj pre $(n + 4) \times (n + 4)$.

Poďme sa teraz bližšie pozrieť na $n$ nepárne:
Naša hypotéza hovorí, že pre $n$ nepárne ($n \geq 5$) sa nám zvýši minimálne 1 štvorček, ktorý sa môže nachádzať na podobných pozíciách ako pre $n = 5$. Menej štvorčekov sa nám zvýšiť zrejme nemôže,

keďže pre $n$ nepárne číslo $n^2$ nie je deliteľné 4. Po rovnakom zafarbení tabuľky ako v časti a) a použití rovnakej úvahy dostávame, že zvyšné políčko naozaj môže zostať iba na nami uvažovanej pozícií.



Ostáva nám už iba ukázať, že zistené pozície naozaj môžu ostať neobsadené. Poďme to dokázať podobne ako pre $n$ párne. Takže pre $n = 5$ sme ukázali v časti a), že tvrdenie platí. Majme teraz tabuľku $n \times n$ ($n \geq 5$), pre ktorú tvrdenie platí. Pridajme na spodok 2 riadky a k jej pravému okraju 2 stĺpce. Opäť sa pozrime na to, či tieto dva pridané riadky a stĺpce vieme vyplniť. Na to nám však stačí ukázať vypĺňanie pre nasledujúce časti z obrázka.



Zvyšok týchto riadkov (stĺpcov) môžeme doplniť pomocou útvarov $1 \times 4$. Takže sme tabuľku $(n + 2) \times (n + 2)$ dokázali vyplniť tak, že sa nám zvýšilo iba 1 políčko. Napríklad: (nasledujúci obrázok ukazuje prechod z $5 \times 5$ na $7 \times 7$) Vidíme, že keď budeme tento obrázok otáčať (podobne ako v časti a)), tak sa nám voľne políčko dostane do každej nami opísanej pozície. Tým sme však našu hypotézu opäť matematickou indukciou dokázali.

**3.** a) Paľko si do zošita píše postupnosti čísel. Začne celým číslom 0, a potom k nemu pripočíta nejaké prirodzené číslo $a$. Potom znova pripočíta $a$, a znova, a znova. Paľkova postupnosť teda vyzerá takto: $0, a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

Jožko si zvolil prirodzené číslo $b$ a do zošita si začal písať zvyšky Paľkových čísel po delení číslom $b$ (presne v tom istom poradí, v akom mal napísané čísla Paľko). Ukážte, že bez ohľadu na to, aké čísla si chlapci zvolia, bude od istého miesta Jožkova postupnosť obsahovať presne tie isté čísla, ako na začiatku (teda je periodická).

b) Aj Samko si začal písať do zošita čísla, ale namiesto sčítania nasobí a namiesto nuly začína jednotkou. Takže jeho postupnosť vyzerá takto: $1, a, a^2, a^3, \ldots$

Mirko si myslí, že keď si zvolí hocijaké prirodzené číslo $b$, začnú sa zvyšky Samkových čísel po delení číslom $b$ tiež od istého miesta opakovať. Má Mirko pravdu?

c) Pani učiteľka si všimla hru chlapcov a povedala: „Nech $P(x)$ je ľubovoľný polynóm s celočíselnými koeficientami. Vytvorme postupnosť čísel

$$P(1)^1, P(2)^2, \ldots, P(n)^n, \ldots$$

Čo viete o takejto postupnosti povedať?“ Dežko si hneď všimol, že nech si zvolí hocijaké prirodzené číslo $b$, zvyšky jednotlivých členov tejto postupnosti po delení číslom $b$ tvoria periodickú postupnosť. Dokážte, že Dežko má pravdu.

**Opravoval: Feri Kardoš a Vlado „Droopy“ Novák** **Počet riešiteľov: 27**

**Riešenie:**

a) Označme $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť Paľkových čísel a $\{j_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť Jožkových čísel. Zo zadania vieme, že každý člen Paľkovej postupnosti dostaneme tak, že k predchádzajúcemu členu pripočítame číslo $a$, takže je to vlastne postupnosť násobkov čísla $a$. Pre $k$-ty člen tejto postupnosti platí $p_k = (k-1)a$; $k \in \mathbb{N}$. (Je to teda špeciálny prípad aritmetickej postupnosti.)

Jožkova postupnosť obsahuje zvyšky čísel $p_k$ po delení číslom $b$. Platí $j_1 = 0$, pretože $p_1 = 0$ a číslo 0 dáva zvyšok 0 po delení akýmkoľvek číslom $b$.

Aby sme ukázali, že postupnosť Jožkových čísel je periodická, je potrebné ukázať, že sa v nej určite zopakuje prvý člen (číslo 0) a ukázať, že nasledujúce členy budú rovnaké ako tie na začiatku postupnosti.

Ukážme najprv, že v Jožkovej postupnosti sa číslo 0 určite zopakuje. Keďže táto postupnosť obsahuje čísla tvaru $0, a, 2a, 3a, \ldots$, určite sa v nej vyskytne člen $b \cdot a$. Číslo $p_{b+1} = b \cdot a$ je očividne deliteľné

číslom $b$, a preto $j_{b+1} = 0$. Dokonca pre všetky čísla tvaru $l \cdot b \cdot a$ ($l \in \mathbb{N}$) budú príslušné členy Jožkovej postupnosti rovné nule.
To ešte ani zďaleka nepostačuje na ukončenie dôkazu. Teraz je potrebné overiť, že sa aj všetky ostatné členy v Jožkovej zvyškovej postupnosti opakujú. Ukážeme, že člen tvaru $(kb + z) \cdot a$ dáva taký istý zvyšok po delení číslom $b$ ako člen $z \cdot a$. Inými slovami, zvyšok, ktorý dáva číslo $l \cdot a$ po delení číslom $b$ závisí len od zvyšku, ktorý dáva číslo $l$ po delení číslom $b$.
Dve čísla dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom $b$ práve vtedy, keď ich rozdiel je deliteľný číslom $b$. Rozdiel čísel $(kb + z) \cdot a$ a $z \cdot a$ je

$$(kb + z) \cdot a \ - z \cdot a \ = kb \cdot a \ = ka \cdot b,$$

takže je deliteľný číslom $b$. Z toho už potom vyplýva, že v Jožkovej postupnosti sa bude periodicky opakovať prvých (najviac) $b$ zvyškov.
Pozn.: Najmenšia perióda Jožkovej postupnosti nemusí byť určená členom $b \cdot a$, aj keď na dôkaz periodicity postačuje. Najmenšia perióda je určená členom $n(a, b)$ (najmenší spoločný násobok čísel $a$, $b$). (Rozmyslite si to poriadne!)
b) Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť Samkových čísel a $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť Mirkových čísel. Zo zadania vieme, že každý člen Samkovej postupnosti dostaneme tak, že predchádzajúci člen vynásobíme číslom $a$, takže je to vlastne postupnosť mocnín čísla $a$. Pre $k$-ty člen tejto postupnosti platí $s_k = a^{k-1}$; $k \in \mathbb{N}$. (Je to teda špeciálny prípad geometrickej postupnosti.)
Mirkova postupnosť obsahuje zvyšky čísel $s_k$ po delení číslom $b$. Na rozdiel od časti a) Mirkova postupnosť nemusí byť periodická od začiatku. Aby sme dokázali, že postupnosť Mirkových čísel sa od istého miesta začne opakovať, stačí ukázať dve veci: Najprv overíme, či sa niektorý člen v Mirkovej postupnosti musí zopakovať. Potom si uvedomíme, že hodnota nasledujúceho člena závisí len od hodnoty člena predcházajúceho, takže akonáhle sa niekde vyskytnú dve rovnaké čísla, povedzme $m_i = m_j$, tak aj čísla $m_{i+1}$ a $m_{j+1}$ musia byť rovnaké, a myšlienku môžeme použiť znova. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ bude teda platiť $m_{i+n} = m_{j+n}$.
Mirkova postupnosť obsahuje zvyšky čísel $s_k$ po delení číslom $b$, jej členy preto môžu nadobúdať len hodnoty $0, 1, 2, \ldots, b - 1$. Týchto hodnôt je len konečne veľa a Mirkova postupnosť je nekonečná, preto sa nemôže stať, že by sa žiaden člen nezopakoval. Presnejšie, podľa Dirichletovho princípu medzi prvými $b + 1$ členmi Mirkovej postupnosti určite existujú aspoň dva rovnaké. Povedzme, že tieto zvyšky sú $m_i = m_j = z$ ($i < j$ a $0 \leq z < b$). Potom prislúchajúce členy Samkovej postupnosti sú čísla tvaru

$$s_i = l_1 \cdot b + z \qquad \text{a} \qquad s_j = l_2 \cdot b + z \qquad \text{kde } l_1, l_2 \in \mathbb{N}.$$

Ich nasledovníci po vynásobení $a$ majú tvar

$$s_{i+1} = s_i \cdot a \ = al_1 \cdot b + az \qquad \text{a} \qquad s_{j+1} = s_j \cdot a = al_2 \cdot b + az.$$

Tieto čísla dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom $b$, pretože ich rozdiel $(l_2 - l_1)ab$ je očividne deliteľný číslom $b$. Preto $m_{i+1} = m_{j+1}$. Použitím tej istej myšlienky dostávame, že $m_{i+n} = m_{j+n}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, čo bolo treba dokázať.
*Iné riešenie.* Podobne ako v prvom riešení si uvedomíme, že počet možných hodnôt v Mirkovej postupnosti je len konečný, preto sa niekde musí zopakovať číslo, ktoré sa v tejto postupnosti už vyskytlo niekde predtým. Na to, aby sme ukázali, že postupnosť je od tohto miesta periodická, stačí ukázať, že hodnota člena $m_{i+1}$ závisí len od čísla $m_i$ a nie je závislá od presnej hodnoty čísla $s_i$. A to je jednoduché: Ak $s_i = lb + m_i$, tak

$$s_{i+1} = (lb + m_i)a = al \cdot b + m_i \cdot a,$$

a teda hodnotu $m_{i+1}$ vieme vypočítať tak, že zistíme, aký zvyšok dáva číslo $m_i \cdot a$ po delení číslom $b$.
Pozn.: Mirkova postupnosť nemusí byť nutne periodická už od začiatku. Napríklad ak čísla $a$ a $b$ sú súdeliteľné, prvý člen $s_1 = m_1 = 1$ sa v postupnosti zvyškov už nikdy nemôže zopakovať. Dokonca

ak číslo $b$ vo svojom rozklade na súčin prvočísel obsahuje len prvočísla, ktoré sú aj delitele čísla $a$, zvyšková postupnosť obsahuje od istého miesta len samé nuly.
c) V tejto časti úlohy vystupuje akýsi všeobecný polynóm a v postupnosti sa navyše mení základ aj exponent. Nech

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad \text{kde } n \in \mathbb{N}, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0.$$

Pred tým, ako sa vrhneme na postupnosť pani učiteľky

$$P(1)^1, P(2)^2, \ldots, P(n)^n, \ldots,$$

skúmajme najprv postupnosť

$$P(1), P(2), \ldots, P(n), \ldots$$

Podobne ako v časti a) ukážeme, že táto postupnosť je periodická s periódou $b$. Aký zvyšok dáva číslo $P(b+1)$ po delení číslom $b$? Po vyskúšaní niekoľkých konkrétnych polynómov by sme mali objaviť, že dáva rovnaký zvyšok ako číslo $P(1)$. A naozaj, ak pre každý člen polynómu šikovne použijeme vzorec

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

pre čísla $A = b+1$ a $B = 1$, dostávame, že rozdiel čísel $P(b+1)$ a $P(1)$ je rovný

$$\begin{aligned}
P(b+1) - P(1) &= \big(a_n(b+1)^n + a_{n-1}(b+1)^{n-1} + \cdots + a_1(b+1) + a_0\big) - \\
&\qquad\qquad - \big(a_n \cdot 1^n + a_{n-1}1^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 1 + a_0\big) = \\
&= a_n((b+1)^n - 1^n) + a_{n-1}((b+1)^{n-1} - 1^{n-1}) + \cdots + a_1(b+1-1) + a_0(1-1) = \\
&= a_n \cdot b \cdot ((b+1)^{n-1} + \cdots + 1) + a_{n-1} \cdot b \cdot ((b+1)^{n-2} + \cdots + 1) + \cdots + a_1 \cdot b = \\
&= b\left[a_n\left((b+1)^{n-1} + \cdots + 1\right) + a_{n-1}\left((b+1)^{n-2} + \cdots + 1\right) + \cdots + a_1\right],
\end{aligned}$$

takže je deliteľný číslom $b$.
Podobne sa dá ukázať, že číslo $P(b+2)$ dáva po delení číslom $b$ rovnaký zvyšok ako číslo $P(2)$, atď. Iný spôsob ako sa dopracovať k tomu istému výsledku je použiť tvrdenie, že ak $P(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientami, tak pre ľubovoľné $k, l \in \mathbb{Z}, k \neq l$ platí

$$(k-l) \mid (P(k) - P(l)).$$

Potom ak rozdiel čísel $k$ a $l$ je deliteľný číslom $b$, tak aj rozdiel čísel $P(k)$ a $P(l)$ je deliteľný číslom $b$. Z toho dostávame, že čísla $P(kb+z)$ a $P(z)$ dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom $b$, a teda postupnosť zvyškov čísel $P(1), P(2), \ldots$ po delení číslom $b$ je periodická s periódou $b$.
Teraz sa vrátime k pôvodnej postupnosti. Na základe našich zistení môžeme povedať, že čísla

$$P(1)^1, P(2)^2, \ldots, P(b)^b, P(b+1)^{b+1}, P(b+2)^{b+2}, \ldots, P(kb+z)^{kb+z}, \ldots$$

dávajú rovnaké zvyšky po delení číslom $b$ ako čísla

$$P(1)^1, P(2)^2, \ldots, P(b)^b, P(1)^{b+1}, P(2)^{b+2}, \ldots, P(z)^{kb+z}, \ldots.$$

Neurobili sme nič iné, ako nahradili každé číslo tvaru $P(kb+z)$ číslom $P(z)$. (Rozmyslite si to poriadne!)
Môžeme si všimnúť, že v tejto postupnosti exponenty rastú, ale základy sa periodicky opakujú. Táto postupnosť sa preto skladá z $b$ podpostupností, každá z nich obsahuje mocniny toho istého čísla. Rozložme preto našu postupnosť na jednotlivé podpostupnosti podľa základu mocnín.
Prvá vybraná podpostupnosť je postupnosť čísel

$$P(1)^1, P(1)^{b+1}, P(1)^{2b+1}, P(1)^{3b+1}, \ldots, P(1)^{kb+1}, \ldots$$

Každý ďalší člen tejto podpostupnosti vieme dostať tak, že predchádzajúci člen vynásobíme číslom $P(1)^b$. Ak nás zaujímajú len zvyšky týchto čísel po delení číslom $b$, tak môžeme urobiť rovnakú úvahu ako v druhom riešení časti b): Možných zvyškov po delení číslom $b$ je len konečne veľa, a keďže zvyšok nasledujúceho člena závisí len od zvyšku predchádzajúceho, od istého miesta sa členy musia začať periodicky opakovať.
Rovnako môžeme postupovať pre všetky ostatné vybrané podpodstupnosti. Pre podpostupnosť čísel tvaru $P(z)^{bk+z}$ dostaneme, že ich zvyšky po delení číslom $b$ sa od istého miesta začnú opakovať s periódou $p_z$. Keďže tých vybraných postupností je len konečne veľa, od istého miesta sa budú musieť začať opakovať zvyšky po delení číslom $b$ v každej z nich. Každá z vybraných podpostupností bude mať nejakú periódu $p_z$. Avšak, tieto periódy zvyškov vybraných podpostupností nemusia byť rovnaké. Za periódu zvyškov celej postupnosti môžeme zobrať najmenší spoločný násobok $n(p_0, p_1, p_2, \dots, p_{b-1})$ všetkých periód zvyškov vybraných podpostupností.
Tým sme ukázali, že zvyšky po delení číslom $b$ členov postupnosti $P(n)^n$ sa začnú od istého miesta periodicky opakovať.
Pozn. Postupnosť zvyškov sa nemusí začať opakovať už od začiatku, čo si môžeme ilustrovať na príklade postupnosti: $P(x) = 2x^2 - x + 1$ a $b = 4$ a mnohých ďalších.
Odpoveď: Dežko má pravdu, ak pojem „periodická postupnosť" chápeme tak, že jej členy sa od istého miesta začnú opakovať (t.j. je od istého miesta periodická). Dežko nemá pravdu, ak pojem „periodická postupnosť" chápeme tak, že jej členy sa musia opakovať už od začiatku.

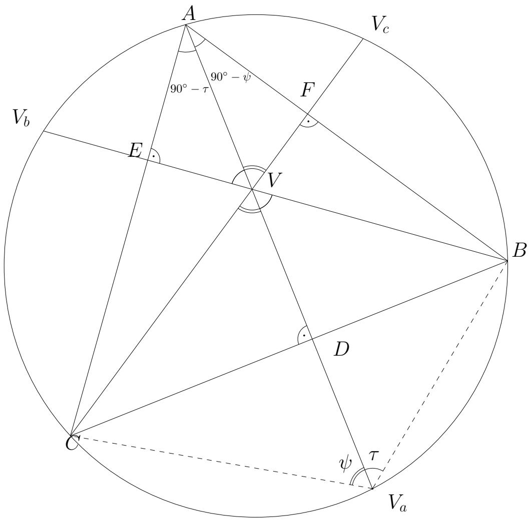
*Komentár:* Časť a) si vyžadovala najmä dôkladné prečítanie zadania. Ak ste si následne uvedomili, že treba zistiť, kde sa zopakuje nula a overiť opakovanie aj nasledovníkov, tak ste úlohu vyriešili poväčšine zdarne. Časť b) bola náročnejšia a práve tá si vyžadovala uvedomenie si hlavných myšlienok tejto úlohy, a to: počet možných rôznych zvyškov je ohraničený; vzťah rekurentnosti, zvyškov a opakovania sa určitej časti až od istého miesta. Škoda, že ste často zabúdali na detaily, ktoré vám znemožnili úplne dotiahnutie riešenia. Časť c) si vyžadovala nielen využitie poznatkov z predchádzajúcich možností, ale aj istú dávku trpezlivosti. Preto sme udeľovali za a) 2 body, za b) 4 body a za c) 3 body. Do budúcnosti by ste si mali dávať pozor na prirýchle závery, ktoré vas často pripravili o body. Na druhej strane našli sa aj veľmi pekné riešenia, v ktorých bolo viditeľné hranie sa s príkladom. =)
Najlepší riešitelia: Radomír Bosák, Matúš Stehlík.

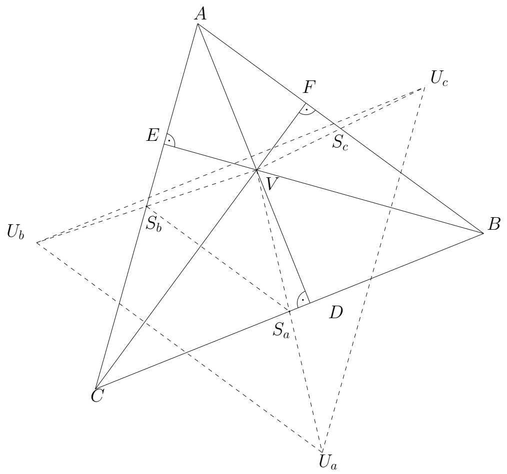
**4.** Nech $ABC$ je ostrouhlý trojuholník s priesečníkom výšok $V$.
a) Označme $V_a$, $V_b$, $V_c$ po poradí obrazy priesečníka výšok v osových súmernostiach podľa strán $BC$, $CA$, $AB$. Dokážte, že body $V_a$, $V_b$, $V_c$ ležia na kružnici opísanej trojuholníku $ABC$.
b) Označme $U_a$, $U_b$, $U_c$ po poradí obrazy priesečníka výšok v stredových súmernostiach podľa stredov strán $BC$, $CA$, $AB$. Dokážte, že body $U_a$, $U_b$, $U_c$ ležia na kružnici, ktorej polomer je rovnaký ako polomer kružnice opísanej trojuholníku $ABC$.
c) Označme $U_a$, $U_b$, $U_c$ po poradí obrazy priesečníka výšok v stredových súmernostiach podľa stredov strán $BC$, $CA$, $AB$. Dokážte, že trojuholníky $U_aU_bU_c$ a $ABC$ sú zhodné.

**Opravoval: Rasťo Oľhava** **Počet riešiteľov: 14**
**Riešenie:**

a) Označme $D$, $E$, $F$ päty výšok spustených z vrcholov $A$, $B$, $C$ v trojuholníku $ABC$. Keďže $V_a$ je obrazom $V$ v osovej súmernosti podľa priamky $BC$, body $V_a$, $D$, $V$, $A$ ležia na jednej priamke. Trojuholník $BVD$ sa v osovej súmernosti podľa priamky $BC$ zobrazí na trojuholník $BV_aD$, a teda tieto trojuholníky sú zhodné, pretože osová súmernosť je zhodné zobrazenie.

Odtiaľ máme $|\sphericalangle BV_aD| = |\sphericalangle BVD|$. Označme veľkosť týchto uhlov $\tau$. Uhol $AVE$ je vrcholový s uhlom $BVD$, a teda $|\sphericalangle AVE| = |\sphericalangle BVD| = \tau$. Ďalej $|\sphericalangle EAV| = 90^\circ - \tau$, pretože súčet uhlov v trojuholníku $AEV$ je $180^\circ$ a uhol $AEV$ je pravý. Označme $|\sphericalangle CV_aD| = \psi$. Potom analogicky dostaneme, že $|\sphericalangle FAV| = 90^\circ - \psi$. Keďže $|\sphericalangle FAE| = |\sphericalangle BAC| = 180^\circ - \psi - \tau$ a $|\sphericalangle CV_aB| = \psi + \tau$, ich súčet je $180^\circ$. Použijeme vedomosť, že štvoruholník je tetivový práve vtedy, ak súčet jeho protiľahlých vnútorných uhlov je $180^\circ$ a vidíme, že štvoruholník $ABV_aC$ tetivový je. Preto bod $V_a$ leží na kružnici opísanej trojuholníku $ABC$. Podobne ukážeme, že na nej ležia aj body $V_b$, $V_c$.

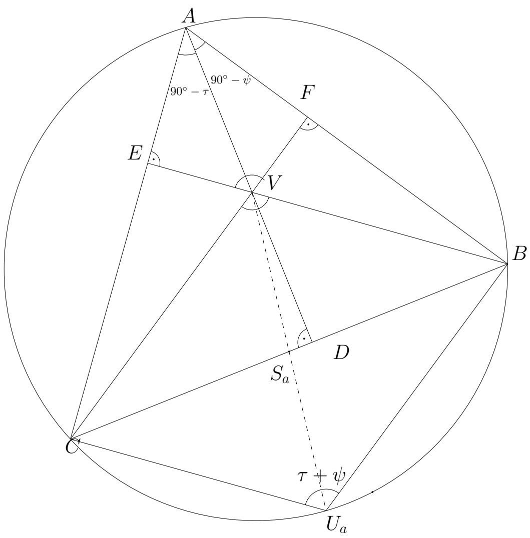



c) Označme $S_a$, $S_b$, $S_c$ po poradí stredy strán $BC$, $AC$, $AB$. Úsečka $S_aS_b$ je stredná priečka v trojuholníku $ABC$ prislúchajúca strane $AB$. Ďalej, $S_aS_b$ je stredná priečka v trojuholníku $VU_bU_a$ prislúchajúca strane $U_bU_a$, pretože zo zadania vieme, že $S_a$, $S_b$ sú po poradí stredy úsečiek $VU_a$ a $VU_b$. Keďže stredná priečka má polovičnú veľkosť prislúchajúcej strany, máme $|AB| = 2 \cdot |S_aS_b| = |U_aU_b|$. Analogicky dokážeme, že $|BC| = |U_bU_c|$ a $|AC| = |U_aU_c|$, čiže trojuholníky $ABC$ a $U_aU_bU_c$ sú zhodné, pretože majú rovnako veľké strany.

b) Z c) vieme, že trojuholníky $ABC$ a $U_aU_bU_c$ sú zhodné. To je dostatočný dôvod na to, aby kružnice im opísané mali rovnaký polomer. Pre názornosť si ešte ukážme ako vyriešiť časť b) bez použitia zhodnosti trojuholníkov $U_aU_bU_c$ a $ABC$.

Dokážeme dokonca silnejšie tvrdenie. Ukážeme, že body $U_a$, $U_b$, $U_c$ ležia priamo na kružnici opísanej trojuholníku $ABC$. Všimnime si štvoruholník $CVBU_a$. Jeho uhlopriečky sa rozpoľujú, pretože bod $S_a$ je ich spoločným stredom. Z toho vyplýva, že štvoruholník $CVBU_a$ je rovnobežník a $|\sphericalangle BU_aC| = |\sphericalangle CVB|$. Z časti a) vieme, že $|\sphericalangle CVB| = |\sphericalangle CV_aB| = \tau + \psi$. Dostávame, že $|\sphericalangle BU_aC| = \psi + \tau$, a teda štvoruholník $ABU_aC$ je tetivový, pretože $|\sphericalangle BU_aC| + |\sphericalangle CAB| = 180^\circ$. Potom už podobne ako v časti a) bod $U_a$ leží na kružnici opísanej trojuholníku $ABC$.




*Komentár:*

Ahojte. Úloha nie je ťažká. Časť a) sa dá vyriešiť viacerými spôsobmi, pričom všetky sú viac-menej priamočiare. Stačí si nakresliť pekný obrázok a už len hľadať podobné trojuholníky, rovnobežky, Tálesove kružnice, dvojice obvodových a stredových uhlov a podobne. Časť b) bola zadarmo, pretože je priamym dôsledkom časti c) a tá sa zas dá jednoducho vyriešiť pomocou stredných priečok. A preto za časť a) ste mohli získať 5 bodov a zvyšné 4 body som rozdeľoval za b) a c) dokopy.

# Poradie po 1. sérii Letného semestra 32. ročníka

| P. | Meno a priezvisko | Trieda | Škola | 1. | 2. | 3. | 4. | H | CS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Ladislav Bačo | 2. A | GPoštKE | 7 | 9 | 8 | 9 | 2 | 42 |
| 2. | Martin Polačko | Septima A | GAlejKE | 4 | 9 | 7 | 9 | 0 | 36 |
| 3. | Jakub Köry | 4. B | GMudrPO | 6 | 6 | 8 | 9 | 1 | 35 |
| 4. | Jakub Vaňo | 3. D | GMudrPO | 5 | 9 | 5 | 9 | 0 | 33 |
| 5. | Filip Sládek | Sexta B | GMierNO | 8 | 6 | 4 | 7 | 2 | 32 |
| 6. | Radomír Bosák | 3. B | GGrösBA | 7 | 8 | 6 | - | 1 | 27 |
| 7. | Jana Baranová | Sexta | GAlejKE | 5 | 5 | 3 | 4 | 0 | 22 |
| 8. | Jakub Jursa | Septima A | GAlejKE | 6 | 3 | - | 9 | 1 | 21 |
| 8. | Monika Vaľková | Sexta | GAlejKE | 6 | 7 | 2 | - | 0 | 21 |
| 8. | Monika Zlaczka | 1. A | GPoštKE | 7 | 6 | 1 | 0 | 0 | 21 |
| 11. | Eduard Eiben | 3. A | GPoštKE | 8 | 3 | 6 | - | 0 | 20 |
| 12. | Tomáš Rizman | Septima B | GVaršŽA | 4 | 5 | 6 | - | 0 | 19 |
| 12. | Matúš Stehlík | Kvinta | GAlejKE | 3 | 4 | 6 | - | 1 | 19 |
| 14. | Miroslav Liščinský | Septima B | GAlejKE | 4 | 4 | 5 | - | 0 | 17 |
| 14. | Jana Sásková | Septima | G1májTN | 4 | 4 | - | 5 | 0 | 17 |
| 14. | Igor Kossaczký | 3. B | GGrösBA | 6 | 3 | 5 | - | 0 | 17 |
| 17. | Viktor Popovič | Sexta | GMudrPO | 5 | 5 | 1 | - | 0 | 16 |
| 17. | Jozef Lami | 9. A | ZNov2KE | 3 | 3 | 5 | - | 0 | 16 |
| 19. | Peter Milošovič | 1. A | GPoštKE | 6 | - | 2 | - | 0 | 14 |
| 19. | Alžbeta Bohiniková | Kvinta B | GVaršŽA | 4 | 0 | 2 | 4 | 0 | 14 |
| 19. | Lucia Fabišíková | 3. E | GPoštKE | 3 | 5 | - | 3 | 0 | 14 |
| 22. | Andrea Görcsösová | Sexta | GAlejKE | 4 | 4 | 1 | - | 0 | 13 |
| 23. | Michaela Floriánová | Sexta | GGrösBA | - | 5 | 3 | 1 | 0 | 12 |
| 23. | Zuzana Cocuľová | 2. A | GPoštKE | 3 | 1 | 0 | 5 | 0 | 12 |
| 25. | Tomáš Babej | 1. A | GPoštKE | 4 | 1 | 2 | - | 0 | 11 |
| 26. | Michal Petrucha | 4. AF | GMetoBA | 2 | - | 2 | 4 | 0 | 10 |
| 26. | Tomáš Kuzma | Septima A | GAlejKE | 4 | - | 6 | - | 0 | 10 |
| 28. | Milica Fabišíková | 3. E | GPoštKE | 2 | 4 | - | - | 0 | 6 |
| 28. | Daniel Till | 9. A | ZAngeKE | 2 | 2 | 0 | - | 0 | 6 |
| 28. | Juraj Mitro | Sexta A | GMudrPO | - | - | 6 | - | 0 | 6 |
| 31. | Katarína Révészová | 1. A | GPoštKE | - | - | 2 | - | 0 | 4 |


# Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Copycentrum Pergamon s. r. o.

**Názov** **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 4 • Apríl 2008 • Letný semester 32. ročníka (2007/2008)
**Internet:** `http://seminar.strom.sk`
**E-mail:** `strom@strom.sk`

**Vydáva:** Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
**Internet:** `http://www.strom.sk`
**E-mail:** `zdruzenie@strom.sk`