STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Čaute!

Kalendárny rok sa blíži k svojmu neodvratnému koncu a na splnenie novoročných predsavzatí ostáva ľudstvu už len pár dní. Potom prídu chvíle nepríjemnej sebareflexie, počas ktorých sa mnohí uchýlia k výhovorkám, prečo sa to či ono nepodarilo ani tentoraz. Výsledky však hovoria za všetko. Aj tie naše, či už v podobe vzorových riešení, alebo konečného poradia. Skúste sa tam pohľadať, ak sa nezbadáte, tak ste pravdepodobne náš seminár neriešili a my netušíme, prečo čítate tieto riadky. Ak sa zbadáte na popredných priečkach, tak skúste nevybuchnúť od radosti, že máte zároveň aj možnosť zúčastniť sa perfektného sústredenia, o ktorom bližšie informácie získate z iných zdrojov ako tohto úvodníka. Ten sa končí a želá Vám pokojné sviatky.

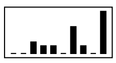
Vaši slušní **STROM**isti

Sústredenie

Vaše snaženie počas predchádzajúcich 3 mesiacov a na Matboji sa konečne zúročilo a pre najlepších z vás je tu zaslúžená odmena v podobe sústredenia. Sústredenie sa bude konať 7.2.2016 - 12.2.2016 v Škole v prírode Kysak. Už sa na Vás tešia vaši obľúbení vedúci s kopou úžasného programu. Nezabudnite čo najskôr vyplniť prihlášku, ktorú čoskoro nájdete na našej webovej stránke a nedočkavo hľadieť do kalendára. Bližšie informácie nájdete v pozvánke, ktorá vybraným z Vás prišla s týmto časopisom, alebo aj bez neho.

1.

Opravovali: Matúš Hlaváčik, Peter Kovács
Počet riešiteľov: 27



Riško a Šiško hrajú na šachovnici 10×10 nasledujúcu hru. Ten, kto je práve na ťahu, si zvolí jeden z riadkov alebo stĺpcov, ktoré neboli doteraz v hre zvolené a všetky políčka v ňom si prefarbí na svoju farbu (Riško má ružovú a Šiško šedú). Riško začínal a v ťahoch sa striedajú. Hra končí, keď už bol každý riadok aj stĺpec zvolený. Nájdite pre Šiška takú stratégiu, pri ktorej na konci hry bude aspoň o 10 šedých políčok viac ako ružových.

Riešenie:

Na začiatok je dobré si uvedomiť, že políčko sa nedá prefarbiť vo chvíli, ak ho niekto prefarbil druhý krát. Raz ho môžem prefarbiť cez stĺpec, raz cez riadok a potom bude toho farby, kto ho zafarbil naposledy.

Po chvíľke skúšania sa môže ako dobrá stratégia javiť zafarbovať šachovnicu symetricky. Teda ak Riško zafarbí stĺpec, my zafarbíme riadok a naopak. Teraz ostáva ukázať, že táto stratégia nám zaistí potrebný náskok.

Ak budeme ťahať symetricky, tak na začiatku každého Riškovho ťahu bude rovnaký počet zafarbených stĺpcov a riadkov, povedzme, že to bude n. Riško teda vo svojom ťahu prefarbí druhý krát n políčok. Potom, ak sme na ťahu my, tak v jednom smere, v tom, v ktorom zafarbil, je o jedna viac, teda $n+1$. My keďže si vyberieme symetrický ťah, zafarbíme $n+1$ políčok.

Keďže ťahov je 10 a my vieme v každom ťahu zväčšiť svoj bodový zisk o 1 viac ako Riško, tak za 10 kôl získame 10 bodový náskok.

Komentár: Mnohí to samozrejme vyriešili správne, ale nemálo z vás nám zabudlo vysvetliť, prečo je stratégia, ktorú ste napísali, naozaj spĺňajúca zadanie. Zvyčajne ste len popísali, ako funguje, len pre konkrétny prípad alebo len pri prvom ťahu, a zovšeobecnenie ste nechali na čitateľa, čo nie je správny spôsob ako napísať riešenie na plný počet bodov. Snáď, ak bude podobná úloha nabudúce, tak to budete mať dobre všetci.

2. Opravovali: Ivka Gašková, Dorot Jarošová

Počet riešiteľov: 13

Nech je dané celé číslo z. Dokážte, že rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z, \\ x^2 + y^2 &= 2z. \end{aligned}$$

majú rovnaký počet riešení na množine celých čísel.

Riešenie:

Aby sme dokázali, že tieto dve rovnice majú rovnaký počet riešení, potrebujeme ukázať, že každému riešeniu $[x, y]$ jednej rovnice vieme priradiť práve jedno riešenie $[a, b]$ druhej rovnice a naopak.

Začneme tým, že ukážeme, že pre každé $[x, y]$, ktoré je riešením prvej rovnice, existuje práve jedno $[a, b]$, ktoré by bolo riešením druhej. Aby sme v prvej rovnici dostali pravú stranu zhodnú s druhou rovnicou, teda $2z$, vynásobíme ju dvojkou.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z \\ 2x^2 + 2y^2 &= 2z \\ x^2 + x^2 + y^2 + y^2 &= 2z \\ x^2 + 2xy + y^2 + y^2 - 2xy + x^2 &= 2z \\ (x + y)^2 + (x - y)^2 &= 2z \end{aligned}$$

Teraz vieme, že ak nájdeme akékoľvek riešenie $[x, y]$ pre prvú rovnicu, existuje pre neho práve jedno riešenie pre druhú rovnicu vo formáte $[a, b] = [(x + y), (x - y)]$. Teda druhá rovnica má aspoň toľko riešení ako prvá. To však ešte neznamená, že ich majú rovnako, a preto je nutné ešte ukázať, že to platí aj naopak. Teda že pre každé riešenie druhej rovnice existuje aspoň jedno riešenie prvej rovnice.

Preveďme teraz ekvivalentné úpravy na druhej z rovníc. Tak ako pri predošlých úpravách, bolo by vhodné, aby sa opäť pravé strany rovníc rovnali. Preto druhú rovnicu vydelíme dvomi.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2z \\ \frac{x^2 + y^2}{2} &= z \end{aligned}$$

Teraz upravíme ľavú stranu na súčet dvoch štvorcov.

$$\begin{aligned} \frac{2x^2}{4} + \frac{2y^2}{4} + \frac{2xy}{4} - \frac{2xy}{4} &= z \\ \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} &= z \\ \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 &= z \end{aligned}$$

Ak teda existuje pre druhú rovnicu riešenie $[x, y]$, existuje aj riešenie pre prvú rovnicu, a to v tvare: $[\frac{x+y}{2}; \frac{x-y}{2}]$. V tomto kroku už sme s riešením skoro hotoví, netreba však zabudnúť ukázať celočíselnosť riešenia prvej rovnice.

Z prvej rovnice môžeme tvrdiť, že výraz $x^2 + y^2$ je párny. Nakoľko druhá mocnina paritu čísla nezmení (lebo to je ako vynásobiť navzájom buď dve nepárne, alebo dve párne čísla), x má rovnakú paritu ako x^2 a pre y to platí rovnako. Aby bol ich súčet, respektíve rozdiel, párnym číslom, musí mať x rovnaký zvyšok po delení dvoma ako y. Z toho vyplýva, že aj $(x + y)$ a $(x - y)$ sú párne. A teda budú čísla $\frac{x+y}{2}$ a $\frac{x-y}{2}$ tiež celé.

Ukázali sme teda, že počet riešení prvej rovnice je prinajmenšom rovnaký, ako počet riešení druhej z rovníc, a tiež naopak, z čoho vyplýva, že sa počet riešení musí rovnať. A to je to, čo sme chceli dokázať.

Komentár: Takmer všetkým riešiteľom, ktorí sa nenechali odradiť zadaním, sa úsilie vyplatilo. Milo nás prekvapili peknými riešeniami.

3. Opravoval: Peter Milošovič
Počet riešiteľov: 17

Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené n existuje číslo zostavené len z cifier 1 a 2, ktoré je deliteľné 2^n.

Riešenie:

Prirodzené čísla, ktorých posledných n číslic tvorí číslo deliteľné 2^n, nazvime čísla D. Číslo D sa dá určite napísať v tvare $x \cdot 10^n + y$, kde x je prirodzené číslo (vrátane 0) a y je posledných n číslic čísla D. Keďže $x \cdot 10^n = x \cdot 2^n \cdot 5^n$, všetky čísla D sú deliteľné 2^n.

Pre potreby nášho príkladu nám preto stačí pre n hľadať už len n-ciferné čísla.

Pre $n = 1$ je takýmto číslom napríklad 2. Pre $n = 2$ poľahky nájdeme 12. Po niekoľkominútovom pátraní sa nám môže začať zdať, že stále len pripisujeme pred doteraz nájdené čísla cifru 1 alebo 2. Inými slovami, ak sme našli k-ciferné číslo D_1 pre $n = k$, číslo D_2 pre $n = k + 1$ bude buď v tvare $10^k + D_1$, alebo v tvare $2 \cdot 10^k + D_1$. Aby číslo D_2 bolo naozaj číslom D, musí byť deliteľné 2^{k+1}. Je to tak? Zistime.

Vieme, že $D_1 = p \cdot 2^k$, kde p je prirodzeným číslom. Platí, že:

$$\begin{aligned} 10^k + D_1 &= \quad 2^k \cdot 5^k + p \cdot 2^k &&= 2^k \cdot (5^k + p), \\ 2 \cdot 10^k + D_1 &= 2 \cdot 2^k \cdot 5^k + p \cdot 2^k &&= 2^k \cdot (2 \cdot 5^k + p). \end{aligned}$$

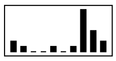
Číslo p je buď párne, alebo nepárne. Ak je nepárne, tak zátvorka $(5^k + p)$ sa dá napísať ako $2 \cdot l$ ($l \in \mathbb{N}$) a $2^k \cdot (5^k + p) = 2^{k+1} \cdot l$. Číslo D_2 v tom prípade dostaneme pripísaním 1 pred číslo D_1. Ak je párne, tak zátvorka $(2 \cdot 5^k + p)$ sa dá napísať ako $2 \cdot l$ ($l \in \mathbb{N}$) a $2^k \cdot (2 \cdot 5^k + p) = 2^{k+1} \cdot l$. Číslo D_2 v tom prípade dostaneme pripísaním 2 pred číslo D_1.

Ukázali sme, že ak sa dá nájsť číslo D_1 pre $n = k$, ktoré je deliteľné 2^k, vieme nájsť aj číslo D_2 pre $n = k + 1$, ktoré je deliteľné 2^{k+1}. Pre $n = 1$ sme našli číslo 2, preto pre každé ďalšie n už bude existovať číslo zložené zo samých 1 a 2, ktoré je deliteľné 2^n.

Komentár: Dôkaz vo vzorovom riešení sa nazýva dôkazom pomocou matematickej indukcie a ak ste o ňom doteraz nepočuli, odporúčame internet. Naschvál sme sa vyhli spomínaniu pojmov "indukčný predpoklad" a "indukčný krok", aby nemiatli ľudí, ktorí sa s takýmito vecami doteraz nestretli. Základná myšlienka takéhoto dôkazu sa často ukazuje na domine, keďže malé podlhovasté kocky ("kvádre" pre tých s nejakou poruchou osobnosti) pozná takmer každý. Niekedy sa tieto kocky stavajú do dlhého radu tak, aby každá pri svojom páde so sebou stiahla na zem aj svojho bezprostredného suseda. Potom na to, aby spadli všetky kocky, postačí zhodenie prvej z nich. Inak povedané, ak vieme, že k. kocka zapríčiní pád $(k + 1)$., stačí nám zapríčiniť pád 1. kocky radu. V našej konkrétnej úlohe predstavujú kocky čísla spĺňajúce podmienku zo zadania.

Ak však už spomeniete, že úlohu riešite "matematickou indukciou", a teda sa odvolávate na myšlienku o domine, musíte jasne povedať, čo je vašou prvou kockou a čo konkrétne je dôkazom, že každá kocka so sebou vezme aj suseda. V niektorých riešeniach to nebolo úplne zrejmé, preto odporúčame, aby ste si pri používaní menej známych slov pre istotu overili ich význam. "Dokážeme sporom", "Dokážeme indukciou" či "Dokážeme pomocou Veľkej Fermatovej vety" nie sú čarovné formulky, ktoré nás zbavujú potreby akokoľvek vysvetľovať svoj postup.

4. Opravoval: Rišo Trembecký
Počet riešiteľov: 19



Skonštruujte pravouhlý trojuholník ABC s danou preponou c taký, že dĺžka ťažnice vychádzajúcej z vrchola C je geometrický priemer dĺžok zvyšných dvoch odvesien.

Riešenie:

Trojuholník ABC je pravouhlý, preto z Tálesovej kružnice nad preponou AB vieme, že dĺžka ťažnice z vrchola C je rovná polovici dĺžky strany AB.

$$\frac{c}{2} = \sqrt{a \cdot b}$$

Umocníme (obe strany rovnice sú kladné, nestrácame žiadne riešenia).

$$\frac{c^2}{4} = a \cdot b$$

Po predelení rovnice dvojkou dostávame na pravej strane obsah pravouhlého trojuholníka ABC.

$$\frac{c^2}{8} = \frac{a \cdot b}{2}$$

Tento obsah vieme vyjadriť aj inak.

$$\begin{aligned}\frac{a\cdot b}{2} &= \frac{c\cdot v_c}{2}\\ \frac{c^2}{8} &= \frac{c\cdot v_c}{2}\end{aligned}$$

Keďže c je dĺžka strany, je nenulová a rovnicu ňou môžeme predeliť.

$$\begin{aligned}\frac{c}{8} &= \frac{v_c}{2}\\ \frac{c}{4} &= v_c\end{aligned}$$

Keďže daná je prepona c, pre konštrukciu trojuholníka potrebujeme získať bod C. Prvá informácia, ktorú o ňom máme, je, že leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AB. Z poslednej rovnice dostávame druhú informáciu, že bod C leží vo vzdialenosti $\frac{c}{4}$ od prepony c. Priesečníky kružnice s rovnobežkami budú určovať všetky možné polohy bodu C, teda riešenia úlohy.

Pred tým, ako sa pustíme do konštrukcie (môžeme aj po tom), mali by sme sa zamyslieť, koľko riešení to bude. Rovnobežka s priemerom kružnice nepretína kružnicu, ak jej vzdialenosť od priemeru je väčšia ako polomer, pretína kružnicu v jednom bode, ak jej vzdialenosť od priemeru je rovná polomeru, a pretína kružnicu v dvoch bodoch, ak jej vzdialenosť od priemeru je menšia ako polomer. Keďže polomer našej kružnice je $\frac{c}{2}$ a vzdialenosť rovnobežky od priemeru je $\frac{c}{4}$, jedna rovnobežka má s kružnicou dva priesečníky. Rovnobežky sú dve, úloha má teda štyri riešenia.

Konštrukcia je jasná, ibaže by nebola. Čo nebude, dovysvetlíme v ďalšom odstavci.

1. Daná je dĺžka c – skonštruujeme úsečku AB.
2. Skonštruujeme kružnicu k – stred v strede prepony AB, polomer veľkosti $\frac{c}{2}$.
3. Zostrojíme rovnobežky p, q s úsečkou AB vo vzdialenosti $\frac{c}{4}$.
4. Priesečníky priamok p, q s kružnicou k sú body C.

Prvá nejasná vec: konštrukcia $\frac{c}{2}$ a $\frac{c}{4}$. Daná prepona môže byť ľubovoľnej veľkosti, ktorá sa nedá ľahko namerať a už vôbec nie deliť. Našťastie poznáme trik s kružidlom a zostrojením osi úsečky pomocou kružníc s rovnakým polomerom a stredmi v hraniciach úsečky. $\frac{c}{4}$? Trik použijeme hneď dvakrát.

Nejasná vec číslo dva? Nuž, rovnobežky. Rovnobežka prechádzajúca bodom je ľahko zostrojiteľná trikom s dvoma pravítkami, naše rovnobežky ale majú byť v konkrétnej vzdialenosti od úsečky. Preto je dôležité poukázať na konštrukciu v poradí: kolmica k_1 na úsečku, nanesenie vzdialenosti (už korektne pripravenej) kružidlom – kružnica, kolmica k_2 na kolmicu k_1 v priesečníku s kružnicou.

Komentár: Skonštruujte. Keď si človek vygoogli, čo to sa vlastne konštrukciou geometrických útvarov myslí, na anglickej wikipédii sa niečo aj dozvie. Informáciu, ktorú hľadal: je to konštrukcia iba pomocou idealizovaného pravítka a kružidla. Pravítko má nekonečnú dĺžku, jednu hranu a žiadnu mierku, kružidlo sa sklápa, keď ho zdvihnete z papiera, a po anglicky sa volá *compass.* Že čo sa? No, sklápa, neviete ním vraj naraz ani preniesť vzdialenosť. Dohodnime sa prosím, že prenášanie vzdialenosti je v pohode :D. Delenie a iné manipulovania so vzdialenosťami spojené s konštrukciou rovnobežiek asi ale nie sú úplne Kosher. (Ticho si nechávam prejsť kolmice…)

Ozaj, veľa z vás úlohu riešilo vyjadrením dĺžok odvesien, vychádzajú tam čísla ako $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\cdot c$. Ako ste viacerí odhalili, aj táto dĺžka sa dá skonštruovať. Trik v konštrukcii odmocniny je v použití Euklidovej vety o výške, kde sú úseky dlhé *odmocňované číslo* a 1, výška potom tvorí odmocninu.

Strhnuté body berte ako príležitosť si zapamätať, čo všetko nie je pri konštrukcii samozrejmé.

5. Opravovali: Maťo Vodička, Roman Staňo

Počet riešiteľov: 5

Nech $a,\ b,\ c$ sú kladné reálne čísla také, že $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \le 4$. Dokážte, že

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2} \ge 3.$$

Riešenie:

Táto nerovnosť sa asi líši od tých, s ktorými sa bežne stretnete na strednej škole. Jej úlohou nie je nájsť konkrétne čísla, pre ktoré platí; naopak, ukázať, že platí pre všetky prípustné. Čo je na nerovnostiach tohto typu „zlé“, je to, že neexistuje univerzálny spôsob, ktorým sa dajú riešiť. Podobné príklady často vyžadujú cvik a rôzne triky. V tomto riešení si ukážeme hneď niekoľko zbraní, ktoré sa vám v boji s nerovnosťami ešte v budúcnosti určite zídu.

Odrazme sa od jednej z mála vecí, ktoré máme – podmienky v zadaní (odteraz ju budeme označovať ★). Všimnime si, že v dokazovanej nerovnosti sa nám vyskytujú štvorce súčtov $(a+b)^2$, $(b+c)^2$, $(c+a)^2$, no nie $(a+b+c)^2$, ako máme v ★. Skúsme preto ★ nejako upraviť. Možno dostaneme niečo podobné ako v nerovnosti a bude sa nám so vzťahmi ľahšie pracovať:

$$4 \geq a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac+a^2+b^2+c^2 = (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2.$$

Za každou nerovnosťou hľadaj autorský zámer ⌣̈. Keď všade vidíme štvorce súčtov, asi to nie je úplne náhoda. Pracujme ďalej tak, aby sme si ich zachovali. Zaveďme substitúciu: $a+b=k,\ b+c=l,\ c+a=m$. Podmienku ★ tak vieme napísať ako: $k^2+l^2+m^2 \leq 4$.

Pusťme sa konečne do dokazovania nerovnosti a dosaďme zo substitúcie (zatiaľ len do prvého člena):

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} = \frac{\frac{k+m-l}{2}\frac{l+k-m}{2}+1}{k^2} = \frac{k^2-m^2-l^2+2lm+4}{4k^2}.$$

Bežným trikom pri nerovnostiach je ohraničenie[1]. Asi ste si už domysleli, že kľúč k úspechu je v správnom použití ★. Číslo 4 v čitateli nám môže byť dobrou nápovedou (vidíte v ňom jednu stranu ★?). Ohraničme teda člen ako:

$$\frac{k^2-m^2-l^2+2lm+(4)}{4k^2} \geq \frac{k^2-m^2-l^2+2lm+(k^2+l^2+m^2)}{4k^2} = \frac{k^2+lm}{2k^2} = \frac{1}{2}+\frac{lm}{2k^2}.$$

Použitím substitúcie a ohraničenia aj pre ostatné členy $\left(\frac{bc+1}{(b+c)^2} \text{ a } \frac{ca+1}{(c+a)^2}\right)$ vieme prepísať dokazovanú nerovnosť na:

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq \frac{1}{2}+\frac{lm}{2k^2}+\frac{1}{2}+\frac{mk}{2l^2}+\frac{1}{2}+\frac{kl}{2m^2}.$$

Ak teda vieme dokázať, že:

$$\frac{1}{2}+\frac{lm}{2k^2}+\frac{1}{2}+\frac{mk}{2l^2}+\frac{1}{2}+\frac{kl}{2m^2} \geq 3 \iff \frac{lm}{2k^2}+\frac{mk}{2l^2}+\frac{kl}{2m^2} \geq \frac{3}{2},$$

máme vyhraté. Zo známej AG nerovnosti (ktorú určite poznáte z 1. čísla časopisu, časti *Mohlo by sa hodiť …*) máme:

$$\frac{lm}{2k^2}+\frac{mk}{2l^2}+\frac{kl}{2m^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{lm}{2k^2}\frac{mk}{2l^2}\frac{kl}{2m^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{3}{2},$$

čo je presne to, čo sme chceli. Z vlastnosti AG a z použitia ★ zo zadania tiež vieme, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď:

$$\frac{lm}{2k^2} = \frac{mk}{2l^2} = \frac{kl}{2m^2} \qquad \text{a zároveň} \qquad k^2+l^2+m^2 = 4.$$

Z prvej z rovností máme: $k=l=m$, a teda $a+b=b+c=c+a \iff a=b=c$, dosadením do druhej z rovností (resp. do ★):

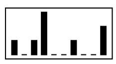
$$4 = 3a^2+(3a)^2 = 12a^2 \implies a = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Dokázali sme tak platnosť nerovnosti pre všetky kladné a, b, c a ukázali, že rovnosť nastáva len pre prípad $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Komentár: (Správnych) riešení prišlo málo, no tomu sa ani nedivíme. Nerovnosti sa môžu zdať ťažké, pokiaľ s nimi nemáme dosť skúseností, ale na druhú stranu, je to téma, ktorá je známa a častá. Riešiteľom preto odporúčame zaloviť v archívoch.

6. Opravoval: Matúš Stehlík

Počet riešiteľov: 8



Nech A je množina kladných prirodzených čísel s aspoň dvoma prvkami. Pre každé dve čísla a, b z množiny A také, že $a > b$, platí, že aj

$$\frac{nsn(a,b)}{a-b} \in A,$$

kde $nsn(a,b)$ je najmenší spoločný násobok čísel a a b. Dokážte, že množina A má práve dva prvky.

[1] Myšlienka spočíva v: Skúsme nájsť také c, že $a \geq c$ a $c \geq b$. Potom vlastne $a \geq b$.

Riešenie:

Najprv sa trošku pohráme s podmienkou zo zadania. Pre ľubovoľné $a, b \in A$, kde $a > b$. Nech D je ich najväčší spoločný deliteľ. Potom existujú $a_1 > b_1$, prirodzené nesúdeliteľné, že

$$a = Da_1, \qquad b = Db_1.$$

Teraz vieme vzťah, ktorý platí pre a, b zo zadania zjednodušiť na

$$\frac{nsn(a,b)}{a-b} = \frac{Da_1b_1}{D(a_1-b_1)} = \frac{a_1b_1}{a_1-b_1} \in A.$$

Uvedený výraz musí byť prirodzené číslo, lenže všimnime si, že žiaden deliteľ $a_1 - b_1$ nemôže deliť a_1 ani b_1, teda ani a_1b_1 (kvôli nesúdeliteľnosti a_1, b_1). Preto

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 = 1 \quad &\Rightarrow \quad a = D(b_1+1), \\ &\Rightarrow \quad a_1b_1 = b_1(b_1+1) \in A. \end{aligned}$$

Okej, toto si zapamätáme. Neskôr to budeme potrebovať (odvoláme sa na to ako to, čo bolo na začiatku).

Ešte si uvedomme, že A je konečná, teda má najmenší aj najväčší prvok. Najmenší ma určite, lebo je neprázdna a zdola ohraničená 1. Nech b je najmenší prvok A. Pre každý iný prvok $a > b$ už zo začiatku vieme, že $a = D(b_1+1) = b + D \leq 2b$. Takže žiaden prvok nemôže byť väčší ako $2b$, teda A je konečná množina. Preto existuje jej najväčší prvok a.

A teraz poďme dokazovať, čo treba. Nech $a > b$ sú najväčší a najmenší prvok A.

Pre a, b označme a_1, b_1, D tak, ako vyššie. Potom aj $a_1b_1 \in A$ a z voľby a, b musí byť

$$a = D(b_1+1) \geq b_1(b_1+1) \geq Db_1 = b.$$

Odtiaľ vyplýva, že

$$b_1 + 1 \geq D \geq b_1.$$

Máme 2 možnosti: buď $b_1 = D$ (možnosť 1), alebo $b_1 + 1 = D$ (možnosť 2).

1. Dosadením do predošlého máme $a = D^2$, $b = D(D-1)$. Pre spor predpokladajme, že A má viac ako 2 prvky. Potom existuje iný prvok $c \in A$ taký, že $a > c > b$. Vezmime teraz dvojicu c, b. Nech $nsd(c,b) = D_2$ a $c = D_2c_2$, $b = D_2b_2$. Analogicky ako na začiatku potom vieme, že $c_2 = b_2 + 1$ a prvok $c_2(c_2-1)$ je tiež v A. Keďže a a b sú najväčší a najmenší prvok A, tak
$$a = D^2 \geq c_2(c_2-1) \geq D(D-1).$$
Preto $c_2 = D$, totiž ak by bolo aspoň $D+1$, tak nesplní horné ohraničenie a ak by bolo menšie rovné $D-1$ nesplní dolné. Potom však
$$b = D_2b_2 = D_2(c_2-1) = D_2(D-1),$$
ale na druhej strane $b = D(D-1)$ teda $D_2 = D$ a tak
$$c = D_2c_2 = D^2 = a,$$
čo je spor, lebo $a > c$.

2. Dosadením do predošlého máme $a = D(D+1)$, $b = D^2$. Túto možnosť vybavíme analogicky ako predošlú. Vezmime dvojicu a, c. Nech $nsd(a,c) = D_3$ a $a = D_3a_3$, $c = D_3c_3$. Analogicky ako na začiatku potom vieme, že $a_3 = c_3 + 1$ a prvok $c_3(c_3+1)$ je tiež v A. Keďže a a b sú najväčší a najmenší prvok A, tak
$$a = D(D+1) \geq c_3(c_3+1) \geq D^2.$$
Preto $c_2 = D$, totiž ak by bolo aspoň $D+1$, tak nesplní horné ohraničenie, a ak by bolo menšie rovné $D-1$, nesplní dolné. Potom však
$$a = D_3a_3 = D_3(c_3+1) = D_3(D+1),$$
ale na druhej strane $a = D(D+1)$, teda $D_3 = D$, a tak
$$c = D_3c_3 = D^2 = b,$$
čo je spor, lebo $c > b$.

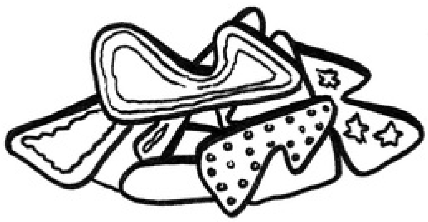
Tým je dôkaz hotový.

Komentár: Hlavným kameňom úrazu bolo popletenie, čo máme vlastne dokazovať. Zadanie zviedlo z cesty svojím zákerným definovaním množiny A viacerých statočných riešiteľov. Väčšina riešení zistila, že ak patria do A nejaké dva prvky a, b, tak prvok a_1b_1, ktorý potom musí tiež patriť do A, nemá inú možnosť, ako byť jedným z a, b. Čo je síce fajn objav, no nijak to nedokazuje, že A nemôže mať viac prvkov. Jedine, že ak sú tie a, b nejaké vhodné, tak A už k nim viac prvkov nepotrebuje. No mohla by ich mať.

Konečné poradie Zimného semestra 40. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kategória	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1.	Tomáš Kekeňák	S4	GMaraKE	54	9	9	9	8	9	9	107
2. - 3.	Laura Vištanová	S3	GMaraKE	54	9	9	9	7	9	9	106
	Samuel Krajči	S1	GAlejKE	54	9	9	9	7	9	-	106
4.	Martin Števko	S1	GAlejKE	53	7	7	9	8	-	-	93
5.	Viktória Brezinová	S1	GAlejKE	48	9	9	9	6	-	-	90
6. - 7.	Juraj Mičko	S3	GPostKE	54	9	9	9	7	-	-	88
	Henrieta Micheľová	S4	GAlejKE	51	9	9	9	7	-	3	88
8. - 9.	Martin Masrna	S2	GPostKE	37	2	9	9	7	-	3	69
	Kristína Mišlanová	S4	GAlejKE	42	9	-	9	9	-	-	69
10.	Žaneta Semanišinová	S4	GAlejKE	42	-	9	9	8	-	-	68
11. - 12.	Veronika Demčáková	S3	GPostKE	27	6	9	9	7	-	3	61
	Michal Pándy	S3	GPostKE	35	3	5	9	9	-	-	61
13.	Daniel Onduš	S4	GAlejKE	27	9	-	9	7	-	6	58
14.	Martin Mihálik	S1	GAlejKE	38	9	-	-	-	-	-	56
15.	Pavol Drotár	S3	GPostKE	41	6	0	-	7	-	-	54
16.	Martin Mičko	S1	GAlejKE	41	6	-	-	-	-	-	53
17.	Filip Csonka	S1	GAlejKE	35	6	-	-	-	-	-	47
18.	Zoltán Hanesz	S3	GPostKE	27	9	-	9	-	-	-	45
19.	Martin Melicher	S1	GPostKE	44	-	-	-	-	-	-	44
20.	Martin Šalagovič	S1	GAlejKE	21	9	-	-	-	-	-	39
21.	Samuel Chaba	S1	GAlejKE	24	6	-	-	-	-	-	36
22. - 23.	Jakub Mach	S3	GPostKE	34	-	-	-	-	-	-	34
	Erik Berta	S1	GAlejKE	22	6	-	-	-	-	-	34
24.	Vratislav Madáč	S1	GAlejKE	28	2	-	-	-	-	-	32
25. - 26.	Kristína Bratková	S3	EGJAK	27	-	-	-	-	-	-	27
	Ján Kurimský	S4	GsMonPO	27	-	-	-	-	-	-	27
27.	Daniel Kopf	S4	SGO	25	-	-	-	-	-	-	25
28.	Michaela Dlugošová	S2	GKukuPO	24	-	-	-	-	-	-	24
29. - 31.	Jonáš Suvák	S1	GJarPO	7	6	-	1	0	0	0	20
	Natália Tóthová	S2	GAlejKE	20	-	-	-	-	-	-	20
	Jarmila Šimková	S2	GParoNR	17	3	-	-	-	-	-	20
32.	Juraj Jursa	S2	GAlejKE	14	4	-	-	-	-	-	18
33.	Samuel Gazda	S4	GYMES	8	7	-	1	1	-	-	17
34. - 35.	Ján Gerčák	S2	GJarSNV	14	2	0	-	0	-	-	16
	Martin Budjač	S1	GPostKE	8	4	-	-	-	-	-	16
36.	Slávka Germanová	S2	GLeoBJ	13	-	-	-	-	-	-	13
37. - 38.	Jakub Genči	S3	GPostKE	12	-	-	-	-	-	-	12
	Šimon Vančo	S4	CGsvMik	12	-	-	-	-	-	-	12
39. - 40.	Dávid Čano	S2	GLeoBJ	3	-	-	-	8	-	-	11
	Jakub Žoldák	S3	GPostKE	11	-	-	-	-	-	-	11
41.	Michaela Borošová	S1	GPostKE	2	-	-	-	4	-	-	10
42.	Dominik Kopčak	S1	GPostKE	6	-	-	-	-	-	2	8
43.	Diana Hlaváčová	S4	GAlejKE	0	-	-	4	-	0	-	4

Vianočný Maxiklub



Na Štedrý deň sa v domácnostiach usádza rodina k spoločnému stolu aby nemusela rozbaľovať darčeky s prázdnym žalúdkom. Aj členovia Združenia STROM sa cítia ako rodina a k spoločnému stolu si zasadnú už o niečo skôr, aby sa pokrvní príbuzní nehnevali. Pozvaní sú všetci. Bývalí organizátori, ktorí majú možnosť pozrieť sa, ako všetko fičí aj bez nich, súčasní riešitelia, ktorých zaujíma, ako sa opravovatelia a vedúci správajú vo voľnej prírode a srdečne pozývame aj teba. Ak sa teda chceš stretnúť a predčasne si vychutnať atmosféru, akú dokáže vyprodukovať len kruh blízkych vo vianočnej nálade, pokojne sa zastav 22. decembra na Jesennej 5 v budove Prírodovedeckej fakulty UPJŠ. Začíname o 14:00 a na vrátnici ti určite radi poradia, v ktorej z mnohých miestností nás nájdeš. Tešíme sa!

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 3 • December 2015 • Zimnný semester 40. ročníka (2015/2016)
Internet:	`http://seminar.strom.sk`
E-mail:	`strom@strom.sk`
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	`http://zdruzenie.strom.sk`
E-mail:	`info@strom.sk`