STROM

Korešpondenčný matematický seminár

SÚSTREDKÁ SA RUŠIA

Ahojte riešitelia. Ahojte ostrieľaní veteráni, ktorí ste si postupne prešli všetkými našimi seminármi, ahojte nováčikovia, ktorým sa dostal do rúk *prvýkrát až* **STROM**. Rád by som sa vám poďakoval za dlhé roky, ktoré naše semináre riešite a dávate nám cennú spätnú väzbu – každá jedna poriadne vyriešená úloha je pre nás v prvom rade znakom, že to, čo pre vás vo voľnom čase robíme, má zmysel. Najväčšou motiváciou (okrem dobrého pocitu), ktorú sme vám vždy pribaľovali k príkladom, bolo, že budete môcť *raz ísť* na sústredenie pre najlepších. O to viac nás mrzí, že z dôvodu nového nariadenia vlády SR vám musíme vziať aj to jediné lákadlo. Ale nezúfajte, nemusí byť všetko tak, ako sa na prvý pohľad zdá. Úvod napíše raz Rišo a neraz Veverka, ale trápnu šifru v ňom by ste mali byť schopní vycítiť aspoň na *jedenásť yardov*. Keď ju vyriešite, pochopíte, prečo si z vás ohľadom sústrediek takto strieľam.

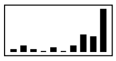
vaši **STROM**isti

TMM

Budeš budúci rok chodiť do prvého alebo druhého ročníka na strednej škole? Tak práve pre teba je tu úžasný a nezabudnuteľný Tábor mladých matematikov. Poď sa aj ty spolu s nami zabaviť od 12. do 20. augusta a zaži leto tvojich snov v RZ Lúčka-Potoky neďaleko Lipian spolu so svojimi obľúbenými kamarátmi aj vedúcimi. Viac informácií nájdeš na webovej stránke `https://matik.strom.sk/`. Tak neváhaj a prihlás sa čo najskôr na `http://prihlasky.strom.sk/tabor`, lebo zostáva už len zopár voľných miest.

1. **Opravovali: Ivana Gašková, Dorota Jarošová**

Počet riešiteľov: 50



Štvorec s obsahom 5 je pokrytý 9 mnohouholníkmi s obsahom 1. Dokážte, že existujú dva mnohouholníky, ktorých prienik má obsah aspoň 1/9.

Riešenie:

Táto úloha sa dá veľmi elegantne vyriešiť sporom. Ako predpoklad si vezmeme opak zadania a teda tvrdíme, že existuje také rozloženie, kde neexistuje prienik dvoch mnohouholníkov väčší alebo rovný 1/9.

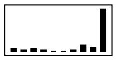
Zo zadania vieme, že mnohouholníky majú spolu obsah 9 rozložený na ploche 5. To znamená, že $9 - 5 = 4$ je plocha, ktorá pripadá na prieniky. Zaujímajú nás plochy prienikov dvoch mnohouholníkov, čo nie je nijak ovplyvnené tým, že sa ich na jednom mieste prekrýva viac. V našom prípade to znamená, že chceme prekryť každý mnohouholník s každým iným mnohouholníkom, aby bolo prienikov čo najviac, a teda aby ich plochy boli čo najmenšie, čo vyčíslime vzťahom $9 * 8/2 = 36$, lebo každý mnohouholník má prienik s ôsmimi inými mnohouholníkmi a ešte delené 2 preto, že prienik mnohouholníka A s mnohouholníkom B je zhodný s prienikom mnohouholníka B s mnohouholníkom A.

Ak teda plochu 4 rozdelíme rovnomerne medzi maximálny možný počet plôch prienikov, dostaneme $4/36 = 1/9$, čo je spor s naším predpokladom. Ukázali sme, že musí existovať aspoň jeden prienik s obsahom aspoň 1/9, nakoľko rovnomerné rozdelenie je prípadom, v ktorom môžeme dosiahnuť najmenšie možné prieniky. Ak by sme plochu prienikov nerozdelili rovnomerne, na to, aby sme nejaký prienik mohli zmenšiť, iný by sa musel zväčšiť, a teda by opäť existoval prienik o veľkosti aspoň 1/9.

Komentár: Mnohí z vás prišli na veľa pekných myšlienok, no posolstvom tejto úlohy by malo byť, že aj jednoduché úlohy a "zjavné" závery treba vždy veľmi dôkladne zdôvodniť. Radšej o jednu vetu viac, ako o jeden bod menej! :)

2. Opravovali: Kristína Mišlanová, Dano Onduš

Počet riešiteľov: 49



Na tabuli sú napísané čísla $1,\ 2,\ \ldots,\ 17$. Čísla zotierame tak, že z nezotretých čísel si vyberieme ľubovoľné číslo k a zotrieme všetky delitele čísla $k+17$. Je možné zmazať všetky čísla?.

Riešenie:

Na to, aby sme číslo z tabule vedeli zmazať, potrebujeme vybrať k, pre ktoré $k+17$ bude násobkom zmazávaného čísla. Pozrime sa na niektoré konkrétne čísla a spôsob ako ich vieme zmazať.

Ak chceme zmazať:

- číslo 15 – jediný spôsob je vybrať $k = 13$
- číslo 13 – jediný spôsob je vybrať $k = 9$
- číslo 9 – máme dve možnosti, a to vybrať $k = 1$ alebo $k = 10$

Bez ohľadu na ostatné vyberané čísla je z týchto podmienok nutné, aby čísla 13, 9 a 1 alebo 10 boli vybrané v tomto poradí.

Keďže 1 je deliteľ každého čísla, tak bude zmazaná už pri prvom zotieraní, a teda nemôže ostať na tabuli potom, čo sme už niekedy vybrali 13 a 9.

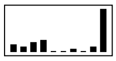
Potrebujeme teda niekedy vybrať za k v tomto poradí čísla 13, 9 a 10.

Pri zvolení $k = 13$ zmažeme všetky delitele čísla $k + 17$, čiže delitele 30. Takže už v tomto kroku z tabule zmažeme číslo 10, a teda nie je možné zmazať z tabule všetky čísla.

Komentár: Väčšine z vás sa podarilo ukázať podobný spor ako vo vzorovom riešení. Inou možnosťou bolo ukázať, že na konci sa číslo, ktoré vyberieme ako k, musí samo zmazať, čo viedlo k ďalšiemu sporu. V tejto úlohe bolo dôležité nájsť spor, ktorý platí všeobecne. Rozoberať nejakú konkrétnu možnosť mazania, ak chceme ukázať, že žiadna nevyhovuje, nie je správny postup.

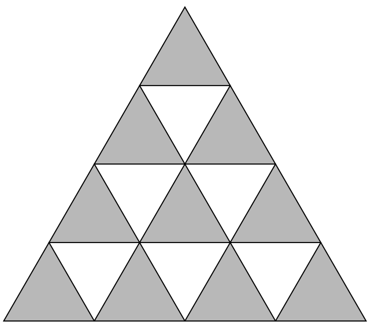
3. Opravovali: Žanetka Semanišinová, Peťo Kovács

Počet riešiteľov: 36



Rovnostranný trojuholník je rozdelený na n^2 zhodných trojuholníkov (napr. obrázok pre $n = 4$). Niektoré z nich sú očíslované číslami od 1 do m tak, že susedné čísla sú vpísané do susedných trojuholníkov - majú spoločnú stranu. Dokážte, že $m \le n^2 - n + 1$.

Riešenie:



Ofarbime si trojuholník čiernou a bielou farbou, ako na obrázku. Všimnime si, že susedné trojuholníky vždy majú rôznu farbu, teda aj po sebe nasledujúce čísla budú vždy v trojuholníku opačnej farby.

Keďže farby sa pri vpisovaní čísel striedajú, zaplníme buď rovnako veľa bielych aj čiernych políčok alebo z jednej farby o 1 viac. Čiernych políčok je v trojuholníku o n viac než bielych (v každom "poschodí" o 1 čierne viac). Ak teda aj zaplníme číslami všetky biele políčka, čiernych políčok môžeme zaplniť najviac o 1 viac. To znamená, že nám stále zvýši aspoň $n-1$ nepoužiteľných čiernych políčok.

Celkový počet políčok je n^2 a aspoň $n-1$ ostane voľných, preto pre počet m zaplnených políčok platí:

$$m \le n^2 - (n-1) = n^2 - n + 1,$$

čo sme chceli ukázať.

Iné riešenie: *(podľa Martina Števka)*

Trojuholník sme rozdelili na n^2 menších trojuholníkov, ktoré majú dokopy $3n^2$ strán. Každá z nich, okrem tých, ktoré sú na obvode (tých je $3n$), prislúcha dvom trojuholníkom. "Vnútorných" strán v tomto trojuholníku je preto $\frac{1}{2}(3n^2 - 3n)$.

Predpokladajme, že sme nejak vpísali do trojuholníkov daných m čísel. Ak po sebe idúce čísla pospájame, vznikne nám cesta, ktorá pretne niekoľko "vnútorných" strán trojuholníka. Keďže z každého trojuholníka mohla cesta najviac raz vyjsť a najviac raz vojsť, pretína najviac 2 strany každého trojuholníka, dokopy teda najviac $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(3n^2 - 3n) = n^2 - n$ "vnútorných" strán.

Keďže každá čiara medzi zaplnenými trojuholníkmi pretína práve jednu "vnútornú" stranu, počet čiar medzi zaplnenými trojuholníkmi je najviac $n^2 - n$, a preto počet zaplnených trojuholníkov je najviac $n^2 - n + 1$. Inak povedané $m \leq n^2 - n + 1$.

Komentár: Úloha dopadla dosť dobre, väčšina správnych riešení sa vydala prvou cestou pomocou rozlíšenia dvoch typov trojuholníkov. To, že z nejakých dôvodov nepoužijeme $n - 1$ trojuholníkov, odhalili takmer všetci z vás. Tí, ktorí stratili body, zväčša narazili na to, že v ich postupe použili len nejaký príklad pre konkrétny algoritmus, akým budú políčka vypĺňať, a tvrdili, že ten algoritmus je najefektívnejší. Ukázať však, že naozaj je (čo je k plnému počtu nutné), by však dalo výrazne viac práce, než samotná nerovnosť.

Na záver pridávame štatistiku rozlíšení typov trojuholníkov v riešeniach (vo vzoráku biele a čierne):

1. Farebné rozlíšenie (čierne resp. červené /biele) – 11
2. Smer (hore/dole) – 2
3. Číslovanie (typ 1/ typ 2) – 2
4. Normálnosť (normálne/prevrátené, klasické/otočené) – 2
5. Tvar (guličky/štvorčeky) – 1

4. Opravovali: Henka Micheľová, Rišo Trembecký

Počet riešiteľov: 43

Biologička Janka pozoruje chameleóna, ktorý chytá muchy. Chameleón má však prešpekulované pravidlá, ako bude pri chytaní múch oddychovať. Pred prvou chytenou muchou oddychuje 1 minútu. Pred každou $2m$-tou muchou oddychuje toľko minút, ako oddychoval pred m-tou muchou. Pred každou $(2m + 1)$-ou muchou oddychuje o minútu viac, ako oddychoval pred m-tou muchou. Keď skončí niekoľko minútový oddych, chameleón okamžite chytí muchu a opäť začne oddychovať. Zistite:

1. Koľkú muchu chytil chameleón po tom, čo prvý krát oddychoval 7 minút bez chytania?
2. Po akom dlhom oddychu chytil chameleón svoju 2047-mu muchu?

Riešenie:

Na začiatku si vypíšeme koľko minút bude chameleón čakať pred pár prvými muchami. Aplikovanie pravidiel zo zadania necháme na vás.

Pozorovaním si sformulujeme nasledujúce tvrdenie: Prvýkrát bude chameleón oddychovať x minút pred $(2^x - 1)$. muchou (pre $x \geq 2$) a zároveň je toto maximálna doba čakania do $(2^x - 1)$. muchy. Toto tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

Pre $x = 2$ je toto tvrdenie pravdivé. Podľa pravidiel zo zadania bude pred prvou muchou čakať 1 minútu, pred druhou muchou bude čakať tiež jednu minútu a pred treťou muchou to už sú dve minúty, čo je prvý výskyt dvoch minút (platí: $3 = 2^2 - 1$). Zároveň platí aj druhá časť tvrdenia – dve minúty sú maximálna doba čakania do tretej muchy.

Predpokladajme teda, že pre x naše tvrdenie platí a jeho platnosť chceme dokázať pre $x + 1$. To bude pozostávať z dvoch častí. V prvej treba ukázať, že pred $(2^{x+1} - 1)$. muchou bude čakať práve $x + 1$ minút, v druhej zas to, že bude toto čakanie ($x + 1$ minút) prvé a maximálne do $(2^{x+1} - 1)$. muchy.

- Prvá časť pozostáva iba z aplikovania druhého pravidla zo zadania, a teda ak pred $n = (2^x - 1)$. muchou čakal x minút, tak pred $2n + 1 = 2 \cdot (2^x - 1) + 1 = 2^{x+1} - 1$. bude čakať o minútu dlhšie, čo je $x + 1$ minút, čo sedí.
- V druhej časti máme dokázať, že je to prvá (prvý výskyt tejto hodnoty) a maximálna doba čakania do $(2^{x+1} - 1)$. muchy. Ak by to neplatilo, kde sa to mohlo porušiť?
  Do $(2^x - 1)$. muchy vieme, že najdlhšie čakanie bolo x minút (predpoklad), takže tam čakanie dlhšie alebo rovné $x + 1$ byť nemôže. Muselo by sa teda nachádzať pred muchami v intervale $< 2^x, 2^{x+1} - 3 >$, alebo pred $(2^{x+1} - 2)$. muchou. O čakaniach v tomto intervale vieme, že ich generujeme z podobného intervalu $< 2^{x-1}, 2^x - 2 >$ striedavým používaním prvého a druhého pravidla zo zadania (mucha 2^{x-1} generuje (2^x). a $(2^x + 1)$. muchu, $2^{x-1} + 1$ generuje $2^x + 2$ a $2^x + 3$, ..., $2^x - 2$ generuje $2^{x+1} - 4$ a $2^{x+1} - 3$). Hodnoty čakaní z nášho intervalu sú teda buď rovnaké, alebo o 1 väčšie, ako hodnoty z menšieho intervalu. Z predpokladu vieme, že prvý výskyt čakania x je až pred $(2^x - 1)$. muchou, preto o čakaniach v menšom intervale vieme, že sú ostro menšie ako x, teda po pripočítaní 1 budú ostro menšie ako $x + 1$.
  Zostáva nám $(2^{x+1} - 2)$. mucha. Čakanie pred ňou dostávame prvým pravidlom z muchy číslo $2^x - 1$, teda má čakanie x minút. To je stále menšie ako $x + 1$.
  Overili sme všetky hodnoty do $(2^{x+1} - 1)$. muchy a nikde sa nevyskytlo čakanie dlhšie ako x, preto je $(x + 1)$-minútové čakanie pred $(2^{x+1} - 1)$. muchou naozaj prvé a maximálne.

Tým sme dokázali naše počiatočné tvrdenie a toto tvrdenie už len aplikujeme na naše podúlohy.

1. Chceme zistiť poradie muchy, pred ktorou prvýkrát chameleón čaká 7 minút, teda to bude $2^7 - 1 = 127$. mucha.
2. 2047-mu muchu vieme prepísať ako $(2^{11} - 1)$. muchu, teda chameleón bude pred ňou čakať 11 minút.

Iné riešenie:
Naším predpokladom bude, že počet minút, ktoré čaká chameleón pred n-tou muchou, bude ciferný súčet čísla n zapísaného vo dvojkovej sústave (napr. číslo 5 zapíšeme v dvojkovej sústave ako 101, teda chameleón bude čakať 2 minúty). Náš dôkaz bude opäť matematickou indukciou.

Pred prvou muchou chameleón čaká 1 minútu, pričom mucha číslo 1 má dvojkový zápis 1, teda pre prvé číslo naše tvrdenie platí. Overíme si to aj pre druhú muchu: $(2)_{10} = (10)_2$, čo je opäť jedna minúta.

Predpokladajme teda, že pre hodnotu n naše tvrdenie platí, a teraz dokážeme, že bude platiť aj pre hodnoty $2n$ a $2n+1$.

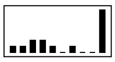
- $2n$: Podľa prvého pravidla zo zadania sa počet minút nezmení oproti n, teda chceme dokázať, že sa nezmení ani ciferný súčet v dvojkovom zápise. Vynásobenie čísla dvojkou však v zápise čísla v dvojkovej sústave iba pridáva jednu cifru 0 na koniec a inak zadané číslo nemení. Teda sa nezmení ani ciferný súčet. V tomto prípade naše tvrdenie platí.
- $2n+1$: Podľa druhého pravidla zo zadania sa počet minút má zvýšiť o 1 (voči n). Teda toto pravidlo má platiť aj o cifernom súčte čísla v dvojkovom zápise. Vynásobenie čísla dvojkou a pripočítanie jednotky v dvojkovom zápise znamená iba pridanie cifry 1 na koniec ciferného zápisu a zvyšok čísla sa nezmení. Z toho nám vyplýva, že sa ciferný súčet zvýši o 1, čo bolo naším cieľom.

Takto sme dokázali naše tvrdenie a teraz ho iba aplikujeme na obe časti úlohy.

1. Chceme vedieť, kedy bude chameleón čakať 7 minút, čo znamená, že toto číslo v dvojkovom zápise obsahuje práve sedem cifier 1 a zvyšné budú iba 0. 7 minút má čakať prvýkrát, preto chceme najmenšie také číslo. Tým je teda: $(1111111)_2 = (127)_{10}$.
2. Platí: $(2047)_{10} = (11111111111)_2$, teda pred 2047 muchou bude čakať 11 minút.

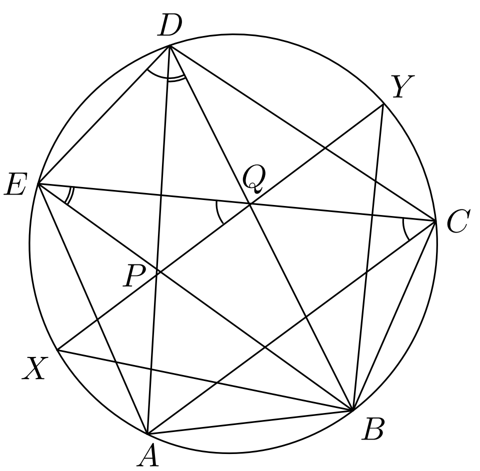
Komentár: Úloha, ako hovoria body, nebola vôbec ťažká. Väčšina z vás stratila body hlavne za prvú časť, kde tvrdenie, ktoré je spomenuté vo vzorovom riešení (resp. akékoľvek slabšie od neho), síce bolo sformulované, ale nenapísali ste dostatočný dôkaz tohto tvrdenia, za čo sme vám nemohli dať plný počet bodov. Do budúcnosti preto aj pri takýchto ľahších úlohách nenechávajte tvrdenia iba v rovine "všimol som si", ale dokážte ich.

5. Opravovali: Maťo Vodička, Roman Staňo
Počet riešiteľov: 15



Je daný tetivový päťuholník $ABCDE$ taký, že $|AB| = |BC|$. Bod P je priesečník priamok BE a AD a bod Q je priesečník priamok CE a BD. Priamka určená bodmi PQ pretne opísanú kružnicu v bodoch X, Y. Dokážte $|BX| = |BY|$.

Riešenie:

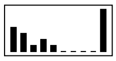


Najprv ukážeme, že priamka AC je rovnobežná s XY. Všimnime si, že: $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle BEC|$ pretože to sú obvodové uhly, ktoré prislúchajú rovnako dlhým tetivám. To tiež znamená, že $|\sphericalangle PDQ| = |\sphericalangle PEQ|$, takže štvoruholník $PQDE$ je tetivový (vrcholy zhodných uhlov $\sphericalangle PEQ$ a $\sphericalangle PDQ$ ležia v jednej polrovine s hraničnou priamkou PQ), a preto $|\sphericalangle EDP| = |\sphericalangle EQP|$. Teraz nám ostáva uvedomiť si, že $|\sphericalangle ECA| = |\sphericalangle EDA|$ (obvodové uhly nad tetivou AE). Dostávame tak, že $|\sphericalangle EQX| = |\sphericalangle ECA|$. Tieto uhly sú teda súhlasné a $AC||XY$. Zvyšok úlohy je už zrejmý. Štvoruholník $ACYX$ musí byť rovnoramenný lichobežník (keďže je tetivový), a teda $|AX| = |CY|$, takže aj príslušné kružnicové oblúky majú rovnakú dĺžku. Zo zadania tiež oblúky nad AB a BC majú rovnakú dĺžku, a preto aj oblúky nad BX a BY sú rovnako dlhé. Z toho ale hneď plynie, že $|BX| = |BC|$, čo sme chceli mať.

Komentár: Dobrým tipom do budúcna je to, aby ste sa snažili v riešení využiť všetky informácie zo zadania. Ak „vyriešite“ úlohu bez toho, že by ste vôbec využili body P a Q, tak to asi nebude dobré. Mnohí ste v úlohe vo veľkom hľadali rovnaké uhly s využitím kružníc. To je však užitočné aj otočiť a nájsť v útvaroch kružnice s využitím rovnakých uhlov (tak ako sme my našli $PQDE$).

6.

Opravovali: Janka Baranová, Matúš Hlaváčik
Počet riešiteľov: 18



Nech a, b, c sú kladné reálne čísla také, že $abc = 1$. Dokážte, že

$$\frac{a+b+c+3}{4} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{c+b}.$$

Riešenie:

Najprv si všimneme, že nerovnosť si vieme rozdeliť na tri navzájom obdobné nerovnosti tak, že ich sčítaním dostaneme nerovnosť, ktorú máme dokázať.

$$\frac{a+1}{4} \geq \frac{1}{b+c} \qquad \frac{b+1}{4} \geq \frac{1}{a+c} \qquad \frac{c+1}{4} \geq \frac{1}{a+b}$$

Teraz si ukážeme dôkaz jednej z nich (zvyšné dve necháme na čitateľa ;·)).

Ľavá strana nám pripomína aritmetický priemer čísel a a 1. Z AG nerovnosti vieme, že

$$\frac{a+1}{2} \geq \sqrt{a},$$

preto ľavá strana našej nerovnosti je väčšia alebo rovná ako $\sqrt{a}/2$.

Teraz sa pozrieme na pravú stranu. Využijeme, že $abc = 1$, a teda $b = 1/ac$ a $c = 1/ab$. Po dosadení dostávame

$$\frac{1}{\frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}},$$

čo nám pre zmenu pripomína harmonický priemer čísel ac a ab. Z GH nerovnosti vieme, že

$$\sqrt{ac \cdot ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}}.$$

Po využití faktu zo zadania, že $abc = 1$, dostávame na ľavej strane GH nerovnosti $\sqrt{a}$, a preto pravá strana našej nerovnosti je menšia alebo rovná ako $\sqrt{a}/2$.

Dokopy dostávame, že

$$\frac{a+1}{4} \geq \frac{\sqrt{a}}{2} \geq \frac{1}{\frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}} = \frac{1}{b+c},$$

čo je to, čo sme chceli dokázať. Obdobným dôkazom dostaneme zvyšné dve nerovnosti a ich sčítaním nerovnosť zo zadania.

Komentár: Táto úloha nebola ťažká, čo dokazuje aj množstvo rôznych riešení, ktoré ste nám k tejto úlohe poslali. Naozaj oceňujeme vašu kreativitu ;·). Jedinou zásadnou chybou pri vašom riešení bolo, že ste namiesto dokázania nerovnosti iba vyskúšali nejaké konkrétne dosadenia, respektíve nezvládli dokázať všetky prípady, do ktorých ste si úlohu rozdelili.

Poradie po 1. sérii Letného semestra 41. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1. - 2.	Martin Števko	S2	GAlejKE	9	9	9	7	9	9	0	54
	Sára Kuťková	S3	HERH	9	9	9	9	9	9	0	54
3. - 5.	Peter Onduš	S3	ŠpMNDaG	7	9	9	9	9	9	0	52
	Samuel Krajči	S2	GAlejKE	9	-	9	8	9	9	0	52
	Miroslav Macko	S1	LEAF	7	9	9	9	9	-	0	52
6. - 7.	Filip Csonka	S2	GAlejKE	9	9	9	7	9	-	0	50
	Martin Mihálik	S2	GAlejKE	7	9	9	9	9	-	0	50
8.	Jakub Pravda	S1	ŠpMNDaG	9	9	9	9	3	3	0	48
9.	Matej Hanus	S1	GPostKE	8	9	9	9	2	-	0	46
10.	Michal Masrna	S1	GPostKE	8	9	9	9	-	-	0	44
11. - 12.	Branislav Pastula	S1	GPostKE	8	9	-	7	-	9	0	42
	Dávid Pásztor	S1	GJarPO	9	6	6	9	3	-	0	42
13. - 14.	Róbert Sabovčík	S1	GPostKE	9	9	9	5	-	-	0	41
	Timea Szöllősová	S1	GAMČA	8	9	9	6	-	-	0	41

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
15. - 16.	Michaela Bobeničová	S2	GPostKE	9	9	9	8	2	-	0	39
	Dorota Porubská	S1	GLeoBJ	7	9	3	7	4	-	0	39
17.	Tomáš Ganz	S1	ŠpMNDaG	7	9	9	4	-	0	0	38
18. - 19.	Patrik Paľovčík	S1	GPostKE	9	9	-	9	-	-	0	36
	Klára Hricová	Z9	ZKro4KE	9	9	-	6	-	3	0	36
20. - 23.	Martin Masrna	S3	GPostKE	9	9	9	7	-	1	0	35
	Martin Starovič	S1	GAMČA	9	9	8	-	-	-	0	35
	Matej Tarča	S1	GPostKE	8	9	-	9	-	-	0	35
	Alex Chudíc	S1	ŠpMNDaG	8	9	-	9	-	-	0	35
24. - 25.	Martin Spišák	S3	GAlejKE	9	9	9	7	-	-	0	34
	Norbert Micheľ	Z9	ZKro4KE	1	7	8	9	-	-	0	34
26.	Štefánia Glevitzká	S2	GVBN	7	9	-	-	6	9	0	31
27.	Michal Vorobel	Z9	GJarPO	9	-	3	9	-	-	0	30
28.	Radovan Lascsák	S1	GPostKE	-	9	3	8	-	-	0	29
29.	Viktória Brezinová	S2	GAlejKE	9	8	2	9	-	-	0	28
30. - 34.	Lujza Milotová	Z9	ZBrusKE	4	7	2	7	-	-	0	27
	Gabriela Genčiová	Z9	ZKro4KE	9	9	-	-	-	-	0	27
	Ján Richnavský	Z9	ZKro4KE	6	3	9	-	-	-	0	27
	Tatiana Bielaková	S1	GAMČA	9	9	-	-	-	-	0	27
	Daniel Magula	S3	PiarG	9	9	9	-	-	-	0	27
35. - 36.	Michaela Rusnáková	Z9	GAlejKE	1	7	-	9	-	-	0	26
	Barbora Barančíková	S1	ŠpMNDaG	8	9	-	-	-	-	0	26
37. - 39.	Benjamín Mravec	S1	GPostKE	-	9	-	7	-	-	0	25
	Simona Sabovčíková	Z9	ZKro4KE	7	8	2	-	-	-	0	25
	Miriam Magočiová	S1	GPostKE	-	7	-	7	-	4	0	25
40.	Jakub Farbula	Z9	GAlejKE	9	-	-	6	-	-	0	24
41. - 42.	Jonáš Suvák	S1	GJarPO	1	9	3	-	-	1	0	23
	Martin Albert Gbúr	S1	GPostKE	9	-	-	5	-	-	0	23
43.	Vratislav Madáč	S2	GAlejKE	7	-	9	6	-	-	0	22
44.	Jakub Venglik	S2	GPOHKK	0	7	2	8	1	2	0	21
45. - 46.	Dominika Nguyen	Z9	GAlejKE	6	2	-	6	-	-	0	20
	Andrej Pankuch	Z9	GAlejKE	6	-	-	7	-	-	0	20
47. - 49.	Tomáš Chovančák	S1	GPostKE	9	-	-	-	-	-	0	18
	Samuel Novák	S1	GPostKE	-	9	-	-	-	-	0	18
	Dominika Jurášová	S1	ŠpMNDaG	8	2	-	-	-	-	0	18
50.	Marek Koman	S3	GAlejKE	4	9	-	4	-	-	0	17
51. - 53.	Samuel Chaba	S2	GAlejKE	9	-	-	7	-	-	0	16
	Ondrej Tomášik	S1	GJgtBB	-	8	0	-	-	-	0	16
	Lucia Hlaváčiková	S3	GCharkKE	7	9	-	-	-	0	0	16
54. - 55.	Michaela Dlugošová	S3	GKukuPO	-	-	3	7	-	-	0	10
	Juraj Vlašič	S2	GAEinBA	-	1	1	7	-	1	0	10
56. - 59.	Martin Šalagovič	S2	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	0	9
	Erik Berta	S2	GAlejKE	2	-	0	7	-	-	0	9
	Katarína Kuľková	S3	GPostKE	-	9	-	-	-	-	0	9
	Róberta Juríková	S2	GVBN	-	-	-	-	-	9	0	9
60.	Klara Kapustová	Z9	Gympk	-	0	1	-	0	0	0	2
61.	Eduard Čekel	S1	TA	-	0	0	0	-	0	0	0

Zadania úloh letného semestra 41. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `https://seminar.strom.sk`.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **9. 5. 2017**

1. Dokážte, že ak p, q sú kladné celé čísla čísla, tak kladným celým číslom je aj

$$\frac{10^{p+q} + 2 \cdot 10^q + 2 \cdot 10^p + 4}{36}.$$

2. Dokážte, že v ľubovoľnom konvexnom mnohouholníku (okrem rovnobežníka) možno vybrať tri strany tak, aby priamky nimi určené tvorili trojuholník, v ktorom je daný mnohouholník obsiahnutý.

3. V každom vrchole štvorca máme 1 kamienok a v každom kroku môžeme previesť nasledujúcu operáciu: z ľubovoľného vrcholu zoberieme niekoľko kamienkov (najviac toľko, koľko ich tam je) a pridáme dvakrát viac kamienkov na niektorý zo susedných vrcholov. Je to možné robiť tak, aby sme na konci vo vrcholoch dostali (zaradom po obvode) 2016, 2015, 2017 a 2016 kamienkov?

4. Nájdite všetky kladné celé čísla n, ktoré sa nedajú zapísať v tvare $n = [a, b] + [b, c] + [c, a]$, pričom a, b, c môžu byť ľubovoľné kladné celé čísla. Pozn: $[a, b]$ označuje najmenší spoločný násobok čísel a, b.

5. Na odvesnách AC a BC pravouhlého trojuholníka ABC sú zvolené postupne body K a L a na prepone bod M tak, že platí $|AK| = |BL| = a$, $|KM| = |LM| = b$ a uhol KML je pravý. Dokážte, že $a = b$.

6. Univerzálnou postupnosťou čísel 1, 2, $\ldots, n$ nazveme takú (konečnú) postupnosť týchto čísel, že vyčiarknutím niektorých jej členov z nej dostaneme ľubovoľnú permutáciu týchto čísel (napr. 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1 je univerzálna postupnosť čísel 1, 2, 3, lebo ľahko preveríme, že všetky permutácie, t.j. $1, 2, 3$; $1, 3, 2$; $2, 1, 3$; $2, 3, 1$; $3, 1, 2$; $3, 2, 1$ vzniknú vyčiarknutím niektorých jej členov). Nájdite najkratšiu univerzálnu postupnosť čísel 1, 2, 3 a potom aj čísel 1, 2, 3, 4 a dokážte, že kratšie neexistujú.

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

Názov	**STROM** – korešpondenčný matematický seminár Číslo 5 • Apríl 2017 • Letný semester 41. ročníka (2016/2017)
Internet:	`http://seminar.strom.sk`
E-mail:	`strom@strom.sk`
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	`https://zdruzenie.strom.sk`
E-mail:	`info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2016-9485/41562:71-10E0.