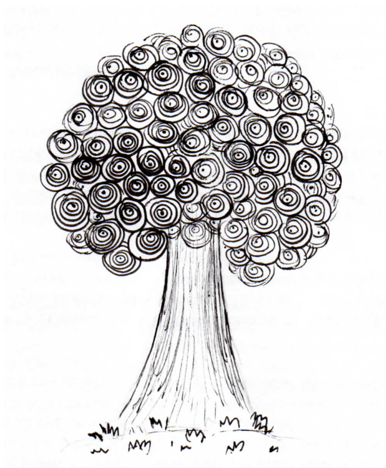
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte!



Vonku sa už otepľuje, miestami aj ochladzuje. Niekde sneží, niekde leje, inde zase slnko hreje. Všetci sa už môžu tešiť, že je tu opäť nový časopis. Už posledný tohto semestra letného, veríme, že čo najviac úspešného. Na tých, ktorým sa darilo najviac, sa tešíme už v prvý jesenný mesiac, lebo 8.–13. 9. 2019 v Danišovciach jesenné sústredko bude a určite sa tam nik nudiť nebude. Dúfame, že ste sa pri riešení a čítaní vzorákov veľa nového naučili, aby ste to v ďalšom ročníku STROM-u šikovne uplatnili. Školský rok šťastne ukončite a potom si prázdniny plnými dúškami užite :).

Navždy vaši **STROM**isti

1. Opravovali: Peter Kovács, Erik Berta

Počet riešiteľov: 48

V tabuľke 25×25 sú čísla $+1$ a -1. Nech a_i je súčin čísel v i-tom riadku a b_j je súčin čísel v j-tom stĺpci. Dokážte, že súčet $a_1 + b_1 + \cdots + a_{25} + b_{25}$ nie je rovný nule.

Riešenie:

Súčin ľubovoľného počtu čísel 1 a -1 nám bude stále dávať výsledok 1 alebo -1, podľa toho, či počet -1 bol párny alebo nepárny. Ak chceme aby súčet 50 čísel (počet súčinov v riadkoch a stĺpcoch) bol rovný 0, tak musí byť 25 z nich 1 a 25 z nich -1. Začnime teda s tabuľkou, kde je súčet 50 a pozrime sa, ako ho vieme meniť. Ak zmeníme znamienko nejakého čísla, zmení sa súčin v príslušnom riadku a stĺpci. To znamená, že súčin v danom riadku a stĺpci sa zmení o 2 ($1 \leftrightarrow -1$). Výsledný súčet sa nám teda môže zmeniť o 0 alebo ± 4, podľa toho, či sa zmenili rovnakým smerom alebo nie. Najväčší súčet môže byť 50 a jeho zvyšok po delení 4 sa nezmení ani pri ľubovoľnom inom usporiadaní a ostane $50 \equiv 2 (mod\, 4)$, čiže súčet nikdy nemôže byť 0.

Môžeme sa na to pozrieť aj tak, že pri zmene čísla sa nám počet kladných a zároveň záporných súčinov zmení o 2 alebo nezmení vôbec. Znova si vezmime usporiadanie, kde sú všetky čísla kladné, teda máme 50-krát +1 a 0-krát -1. Opäť sa pozrime, čo sa môže stať pri zmene jedného čísla. Buď sa dva súčiny s rovnakým znamienkom zmenia na opačné. Alebo si riadok a stĺpec znamienka vymenia. Tým pádom sa počet kladných súčinov zmení vždy o párne číslo. 50 (resp. 0) je párne číslo, a keďže párne $\pm$ párne = párne, tak číslo 25 sa nám nepodarí dosiahnuť, nakoľko je nepárne.

Komentár: Skoro každý, kto sa do úlohy pustil a odovzdal ju, to zvládol veľmi dobre. V riešeniach ste sa vydali dvoma smermi, a to ako sa mení celkový súčet alebo počet kladných/záporných čísel. Zopár riešení počítalo počet (alebo skôr paritu počtu) -1 dvoma spôsobmi cez stĺpce a cez riadky. Pracovali pritom s faktom, že ak v riadkových súčtoch je párny počet -1, musí ich byť nepárny počet v stĺpcových súčtoch, aby dávali dokopy 25. Tento spôsob riešenia si môžete vyskúšať sami.

Občas sa vám stalo, že ste sa pomýlili v terminológii, no skoro vždy bolo jasné, čo máte na mysli v následnom postupe. Niektorí ste sa odvolávali na konkrétne hodnoty a usporiadania, alebo postupovali nejakým konkrétnym systémom, čo ale nezaručuje, že to musí platiť pre ľubovoľnú tabuľku.

2. Opravovali: Viki Brezinová, Janka Baranová

Počet riešiteľov: 31

Ukážte, že neexistuje aritmetická postupnosť s kladnou diferenciou s práve 3, nie nutne po sebe nasledujúcimi, členmi z nekonečnej geometrickej postupnosti $\{2^k\}_{k=0}^{\infty}$.

Riešenie:

Zoberme si ľubovoľnú aritmetickú postupnosť s kladnou diferenciou, ktorá obsahuje práve 3 členy z danej geometrickej postupnosti. Tieto tri členy si označme ako 2^a, 2^b, 2^c, pričom $a > b > c$. Ukážeme, že táto postupnosť musí obsahovať aj ďalší člen geometrickej postupnosti. Vieme, že rozdiel ľubovoľných dvoch členov aritmetickej postupnosti je násobkom diferencie tejto postupnosti, teda $2^a - 2^b$ je násobok diferencie. Zároveň vieme, že ak k ľubovoľnému členu aritmetickej postupnosti pripočítame ľubovoľný násobok diferencie, tak dostaneme iný člen tejto postupnosti. Preto $2^a + k \cdot (2^a - 2^b)$ je pre každé prirodzené číslo k člen tejto aritmetickej postupnosti. Ak by tento člen bol zároveň mocninou dvojky pre nejaké k, tak by bol aj členom geometrickej postupnosti. Pozrime sa pozornejšie na výraz:

$$2^a + k \cdot (2^a - 2^b) = 2^a + k \cdot 2^a - k \cdot 2^b.$$

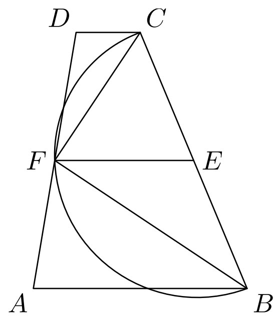
Ak by k bola mocnina dvojky, a zároveň by platilo $2^a - k \cdot 2^b = 0$, tak by sa hodnota celého výrazu rovnala $k \cdot 2^a$, čo by bola mocnina dvojky. Teraz už môžeme prísť na to, že vhodné k bude 2^{a-b}, lebo $2^{a-b} \cdot 2^b = 2^a$. Teda tento člen aritmetickej postupnosti je rovný $(2^a - k \cdot 2^b) + k \cdot 2^a = 2^{a-b} \cdot 2^a = 2^{2a-b}$, teda je zároveň členom geometrickej postupnosti. Keďže $a > b$, tak $2a - b > a$, takže sme našli ďalší väčší člen geometrickej postupnosti, ktorý je zároveň členom našej aritmetickej postupnosti. Preto aritmetická postupnosť s práve 3 členmi z danej geometrickej postupnosti neexistuje.

Komentár: Väčšina z vás úlohu poľahky zvládla, ale niektorí ste poriadne nevysvetlili niektorú z myšlienok, za čo sme vám museli strhnúť nejaké body. Najčastejšou chybou však bolo, že ste predpokladali niečo, čo nie je pravda, napríklad, že členy z geometrickej postupnosti musia byť po sebe idúce v aritmetickej postupnosti.

3. **Opravovali: Kubo Genči, Martin Števko**
Počet riešiteľov: 51

V lichobežníku $ABCD$ sú AB a CD rovnobežné a navyše platí $|BC| = |AB| + |CD|$. Nech F je stredom AD. Nájdite všetky možné veľkosti uhla BFC.

Riešenie:



Označme si stred strany BC ako bod E. Úsečka EF je potom stredná priečka v lichobežníku $ABCD$, takže jej veľkosť je aritmetický priemer dĺžok základní tohto lichobežníka, teda $|EF| = (|AB| + |CD|)/2$. Keďže $|BC| = |AB| + |CD|$, tak platí

$$|EF| = |BC|/2 = |BE| = |EC|.$$

Potom bod E je rovnako vzdialený od bodov B, F a C, takže je stredom kružnice opísanej týmto bodom. To však znamená, že táto kružnica je Tálesova kružnica s priemerom BC, čiže $|\sphericalangle BFC| = 90°$.

Komentár: Úlohu ste riešili zväčša veľmi úspešne, maximálne ste občas zabudli dokázať nejakú drobnosť. Našlo sa aj pár analytických riešení, avšak po tom, čo si prečítate vzorák, veríme, že nabudúce sa vydáte cestou syntetického riešenia. Možno zaberie trocha viac času, ale dá sa spísať omnoho jednoduchšie a neurobíte chybu pri úprave výrazov.

4. **Opravovali: Žanetka Semanišinová, Kristín Mišlanová**
Počet riešiteľov: 13

Máme trojuholník ABC a na strane AB vyznačíme bod S tak, aby $|AS| = |BS|$. Následne označme I_1 stred kružnice vpísanej trojuholníku CAS a I_2 stred kružnice vpísanej trojuholníku CBS. Označme k_1 kružnicu opísanú trojuholníku AI_1C a k_2 kružnicu opísanú trojuholníku BI_2C. Dokážte, že k_1 a k_2 sa okrem bodu C pretínajú na priamke CS.

Riešenie:

Označme druhý priesečník kružnice k_1 a priamky CS ako bod X. Následne sa pokúsime ukázať, že bod X leží aj na kružnici k_2. Musíme rozobrať tri prípady podľa toho, kde na priamke CS sa bod X nachádza.

1) Bod X splynie s bodom C:

Môže nastať prípad, keď sa kružnice k_1 a k_2 iba dotýkajú, vtedy neexistuje iný ich priesečník ako bod C.

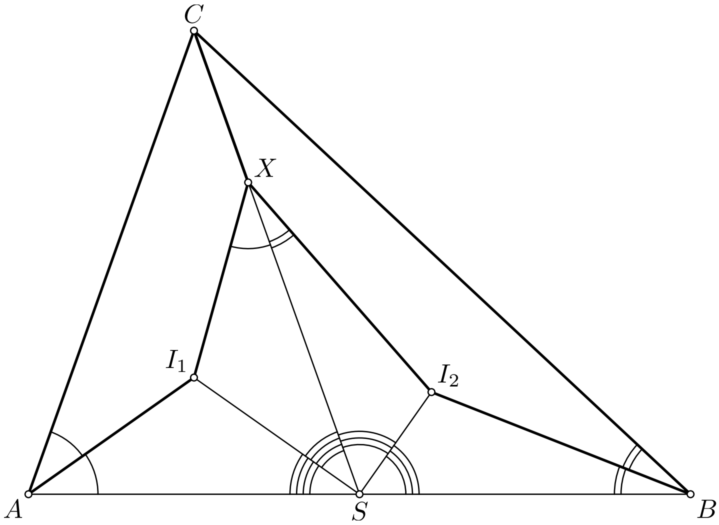
2) Bod X je vnútorným bodom úsečky CS:

Bod I_1 je stred vpísanej kružnice trojuholníka CAS, takže leží na priesečníku osí jeho vnútorných uhlov. Platí $|\sphericalangle SAI_1| = |\sphericalangle I_1AC| = \alpha$. Rovnako $|\sphericalangle ASI_1| = |\sphericalangle I_1SC| = \delta$. Analogicky, keďže I_2 je stred vpísanej kružnice trojuholníka CBS, máme $|\sphericalangle SBI_2| = |\sphericalangle I_2BC| = \beta$ a $|\sphericalangle BSI_2| = |\sphericalangle I_2SC| = \omega$.

Body A, I_1, X a C ležia postupne v tomto poradí na kružnici k_1, tvoria teda tetivový štvoruholník. Z vlastnosti, že súčet protiľahlých uhlov musí byť v tetivovom štvoruholníku $180°$, vieme vyjadriť $|\sphericalangle CXI_1| = 180° - |\sphericalangle I_1AC| = 180° - \alpha$. K nemu susedný uhol potom spĺňa $|\sphericalangle SXI_1| = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$.

Trojuholníky SAI_1 a SXI_1 sú podobné podľa vety *uu*, pretože $|\sphericalangle I_1AS| = |\sphericalangle SXI_1| = \alpha$ a $|\sphericalangle ASI_1| = |\sphericalangle I_1SX| = \delta$. Keďže zdieľajú stranu SI_1, ktorá si v tejto podobnosti prislúcha, tak sú dokonca zhodné. Z toho vyplýva, že $|AS| = |XS|$.

Zo zadania potom máme rovnosť $|BS| = |AS| = |XS|$. Trojuholníky SBI_2 a SXI_2 sú teda tiež zhodné, ale podľa vety *sus*. Platí totižto, že zdieľajú stranu I_2S, $|BS| = |XS|$ a uhol medzi nimi $|\sphericalangle BSI_2| = |\sphericalangle I_2SX| = \omega$. Odtiaľ máme $|\sphericalangle SXI_2| = |\sphericalangle SBI_2| = \beta$. Potom zo susedných uhlov $|\sphericalangle I_2XC| = 180° - \beta$, z čoho rovno vyplýva, že aj štvoruholník BI_2XC je tetivový, keďže $|\sphericalangle I_2BC| + |\sphericalangle I_2XC| = \beta + 180° - \beta = 180°$. Ukázali sme, že bod X leží aj na kružnici k_2 opísanej trojuholníku BI_2C.

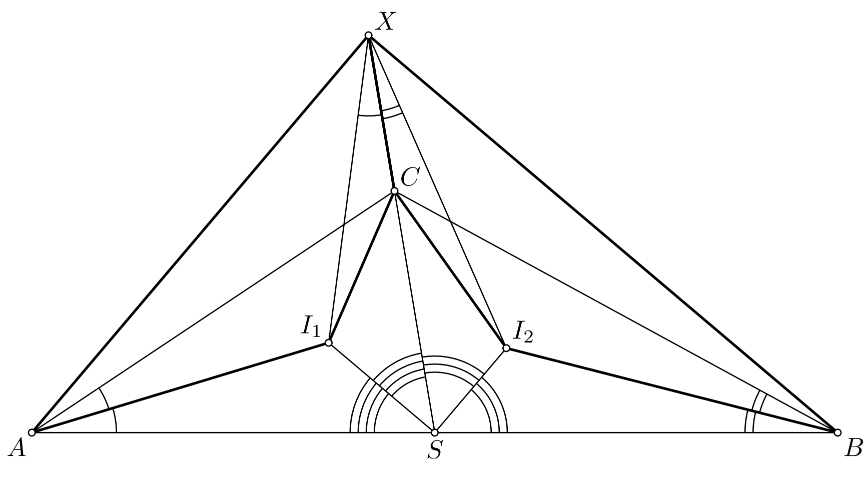


3) Bod X leží na polpriamke opačnej k CS:

Zanechajme označenie $|\sphericalangle SAI_1| = |\sphericalangle I_1AC| = \alpha$, $|\sphericalangle ASI_1| = |\sphericalangle I_1SC| = \delta$, $|\sphericalangle SBI_2| = |\sphericalangle I_2BC| = \beta$ a $|\sphericalangle BSI_2| = |\sphericalangle I_2SC| = \omega$.

Body A, I_1, C a X ležia v tomto poradí na kružnici k_1. Vďaka obvodovým uhlom nad tetivou I_1C máme rovnosť $|\sphericalangle I_1XC| = |\sphericalangle I_1AC| = \alpha$. Keď sa znova pozrieme na trojuholníky SAI_1 a SXI_1, tak sú z rovnakých dôvodov ako v prípade 2) zhodné. Obdobne teda dostaneme $|BS| = |AS| = |XS|$.

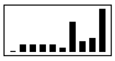
Následne máme zhodnosť trojuholníkov SBI_2 a SXI_2 ako v predchádzajúcom prípade. Získavame opäť rovnosť $|\sphericalangle SXI_2| = |\sphericalangle SBI_2| = \beta$. V kružnici k_2, ktorá je opísaná trojuholníku BI_2C, vieme, že obvodový uhol nad tetivou CI_2 je $|\sphericalangle I_2BC| = \beta$. Keďže ale platí, že aj $|\sphericalangle I_2XC| = |\sphericalangle SXI_2| = \beta$, ako sme ukázali, tak aj tento uhol je obvodový k tetive CI_2, a teda bod X leží na kružnici k_2.



Komentár: Väčšina z vás objavila, že úloha je o šikovnom prenášaní uhlov a vzdialeností pomocou vlastností bodov na kružnici. Pomocou toho sa vám aj podarilo (aj keď často obrovskou obkľukou) dopracovať k tomu, že sa kružnice pretínajú na priamke CS. Háčik bol v tom, že riešenie geometrickej úlohy väčšinou veľmi závisí na obrázku, ktorý si nakreslíte. Ak si pri tom neuvedomíte, že váš obrázok nie je všeobecný, nemusíte vyriešiť celú úlohu. V tomto prípade šlo o polohu bodu X, ktorý mohol ležať aj na úsečke CS, aj mimo nej. Riešenie oboch úloh je síce podobné, ale nie je rovnaké, a preto je pre kompletné riešenie nutné aspoň spomenúť, že niečo také môže nastať a ako je potrebné riešenie upraviť. To väčšina z vás nespravila, za čo nutne išli body dole.

5.

Opravovali: Martin Mihálik, Maťo Spišák
Počet riešiteľov: 38



Nájdite všetky trojice celých čísel (a, b, c) také, že $3^a + 3^b + 3^c$ je druhou mocninou celého čísla.

Riešenie:

Úlohu rozdelíme na dva prípady: 1.) aspoň jedno z čísel a, b, c je záporné celé číslo, 2.) všetky čísla sú nezáporné celé čísla. Ľavá strana je symetrická, preto budeme v celej úlohe bez ujmy na všeobecnosti uvažovať $a \leq b \leq c$.

1. Vyšetríme prípady, keď a) iba a je záporné, b) iba a a b sú záporné, c) všetky tri sú záporné.

   (a) 3^a je prevrátená hodnota mocniny 3, čiže určite to nie je celé číslo a je z intervalu $(0, 1/3]$ (3^{-1} je rovné $1/3$ a každá ďalšia mocnina tri je menšia, ale kladná). 3^b a 3^c sú zrejme prirodzené čísla, z čoho vyplýva, že súčet $3^a + 3^b + 3^c$ nie je celé číslo, takže nemôže byť druhou mocninou celého čísla.

   (b) Analogicky, ako v časti 1.(a) platí, že $3^a, 3^b$ nie sú celé čísla. Navyše obe patria do intervalu $(0, 1/3]$, a teda ich súčet je prvkom intervalu $(0, 2/3]$. Pretože 3^c je prirodzené číslo, platí, že súčet $3^a + 3^b + 3^c$ nie je celé číslo, a teda nemôže byť druhou mocninou celého čísla.

   (c) Obdobne ako v predchádzajúcich bodoch $3^a, 3^b, 3^c$ nie sú celé čísla a každé z týchto čísel je prvkom intervalu $(0, 1/3]$, ich súčet teda patrí do intervalu $(0, 1]$. V tomto intervale sa nachádza jediné celé číslo, ktorým je 1, čo je druhou mocninou čísla 1. Dostávame, že úloha má riešenie práve vtedy, keď $3^a + 3^b + 3^c = 1$, čo nastane práve vtedy, keď 3^a, 3^b, 3^c sú najväčšie možné, čiže $a = b = c = -1$.

2. Prirodzené číslo môže po delení 8 nadobúdať zvyšky z množiny $\{0, \ldots, 7\}$, takže druhá mocnina prirodzeného čísla môže nadobúdať iba druhé mocniny týchto zvyškov (mod 8), čo sú iba čísla z množiny $\{0, 1, 4\}$. Mocnina 3 s nezáporným celým exponentom nadobúda iba zvyšky z množiny $\{1, 3\}$, lebo $3^0 \equiv 1 \pmod 8$, $3^1 \equiv 3 \pmod 8$, $3^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod 8$, atď. (zápis $a \equiv b \pmod 8$ znamená, že čísla a a b majú rovnaký zvyšok po delení 8). Súčet $3^a + 3^b + 3^c$ teda nadobúda iba zvyšky z množiny $\{1, 3, 5, 7\}$, z čoho vidíme, že aby platila rovnosť pravej a ľavej strany, musí platiť $3^a + 3^b + 3^c \equiv 1 \pmod 8$, čo nastane iba v prípade, keď $3^a \equiv 3^b \equiv 3^c \equiv 3 \pmod 8$, čo je práve vtedy, keď všetky tri čísla a, b, c sú nepárne.
   Nakoniec je potrebné zistiť, pre ktoré trojice nepárnych prirodzených čísel je súčet $3^a + 3^b + 3^c$ rovný druhej mocnine prirodzeného čísla. Použijeme substitúcie $a = 2k + 1$, $b = 2l + 1$, $c = 2m + 1$ (stále uvažujeme $a \leq b \leq c$).
   Potom

   $$3^a + 3^b + 3^c = 3^{2k+1} + 3^{2l+1} + 3^{2m+1} = 3(3^{2k} + 3^{2l} + 3^{2m}) = 3(9^k + 9^l + 9^m) = 3 \cdot 9^k(1 + 9^{l-k} + 9^{m-k}).$$

   9^k je druhou mocninou, takže k, l, m musíme voliť tak, aby výraz $3(1+9^{l-k}+9^{m-k})$ bol druhou mocninou prirodzeného čísla. Aby to mohlo platiť, musí byť výraz v zátvorke deliteľný tromi, takže súčet $9^{l-k} + 9^{m-k}$ musí dávať zvyšok 2 po delení tromi.
   Všimnime si, že 9^p je deliteľné 3 pre všetky kladné celé p a dáva zvyšok 1 po delení tromi pre $p = 0$, preto výraz $1 + 9^{l-k} + 9^{m-k}$ je deliteľný 3 práve vtedy, keď $9^{l-k} \equiv 9^{m-k} \equiv 1 \pmod 3$, čo je práve vtedy, keď $k = l = m$. V tom prípade

   $$3 \cdot 9^k(1 + 9^{l-k} + 9^{m-k}) = 3 \cdot 3^{2k}(1 + 9^0 + 9^0) = 3 \cdot 3^{2k} \cdot 3 = 3^{2(k+1)},$$

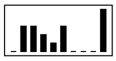
   čo je druhou mocninou prirodzeného čísla.

Vyhovujúcimi trojicami $[a, b, c]$ sú teda všetky trojice $[2k + 1, 2k + 1, 2k + 1]$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$.

Komentár: Bohužiaľ najčastejšou chybou bola pomerne hlúposť – zadanie úlohy si žiadalo zvažovať a, b, c ako celé čísla a mnohí z vás si úlohu uľahčili a zvažovali len prirodzené čísla. Doplniť do úlohy situácie so zápornými číslami nebolo náročné, a tak ste prišli o ľahko zarobené body. Ďalšou častou chybou bolo, keď ste určili nutné podmienky, aby mohol byť zadaný výraz štvorcom, ale neoverili ste, či pre tieto podmienky naozaj aj štvorcom je.

6. Opravovali: Dano Onduš, Martin Masrna

Počet riešiteľov: 17



Nájdite všetky funkcie $f(x)$ na reálnych číslach spĺňajúce $f(t^2+u) = t \cdot f(t) + f(u)$ pre všetky reálne čísla t a u.

Riešenie:

Nech $t = 1, u = 0$. Potom:

$$
\begin{aligned}
f(1^2+0) &= 1 \cdot f(1) + f(0) \\
f(1) &= f(1) + f(0) \\
0 &= f(0)
\end{aligned}
$$

Ak $t = x, u = 0$, potom:

$$
\begin{aligned}
f(x^2+0) &= x \cdot f(x) + f(0) \\
f(x^2) &= x \cdot f(x)
\end{aligned}
$$

A ak $t = -x, u = 0$, tak:

$$
\begin{aligned}
f(x^2+0) &= -x \cdot f(-x) + f(0) \\
f(x^2) &= -x \cdot f-(x)
\end{aligned}
$$

A teda $x \cdot f(x) = -x \cdot f(-x)$, čo znamená, že funkcia je nepárna.

Ďalej rovnicu zo zadania vieme upraviť na:

$$
\begin{aligned}
f(t^2+u) &= t \cdot f(t) + f(u) \\
f(t^2+u) &= f(t^2) + f(u)
\end{aligned}
$$

A keď zvolíme t ako $\sqrt{x}$, dostaneme $f(x+u) = f(x) + f(u)$ pre všetky nezáporné x. Z nepárnosti funkcie ale vyplýva, že $f(x+u) = f(x) + f(u)$ platí pre všetky reálne x, y.

Teraz vyjadríme hodnotu $f((x+1)^2)$ dvoma rôznymi spôsobmi a výsledné výrazy porovnáme:

$$
\begin{aligned}
f((x+1)^2) &= (x+1) \cdot f(x+1) \\
f((x+1)^2) &= (x+1) \cdot f(x) + (x+1) \cdot f(1) \\
f((x+1)^2) &= x \cdot f(x) + f(x) + x \cdot f(1) + f(1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f((x+1)^2) &= f(x^2 + x + x + 1) \\
f((x+1)^2) &= f(x^2) + f(x) + f(x) + f(1) \\
f((x+1)^2) &= x \cdot f(x) + f(x) + f(x) + f(1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \cdot f(x) + f(x) + x \cdot f(1) + f(1) &= x \cdot f(x) + f(x) + f(x) + f(1) \\
x \cdot f(1) &= f(x)
\end{aligned}
$$

$f(1)$ však je iba nejaká konštanta, a preto $f(x) = k \cdot x$ pre ľubovoľné reálne k. Na záver ostáva riešenie overiť skúškou správnosti:

$$
\begin{aligned}
f(t^2+u) &= t \cdot f(t) + f(u) \\
k \cdot (t^2+u) &= t \cdot k \cdot t + k \cdot u \\
k \cdot t^2 + k \cdot u &= k \cdot t^2 + k \cdot u
\end{aligned}
$$

Riešením sú teda všetky rovnice v tvare $f(x) = k \cdot x$ pre ľubovoľné reálne k.

Komentár: Jednoduchým dosadením mnohí z vás našli vlastnosti, ktoré sa dali použiť podobným spôsobom ako vo vzorovom riešení. Často ste sa však potom ubrali nesprávnym smerom. Najčastejšou chybou bolo, že ste predpokladali, že ak $f(x+1) = f(x) + f(1)$, tak funkcia už musí byť lineárna. To by platilo, ak by bola funkcia definovaná len na celých číslach, prípadne sa to dalo zovšeobecniť na racionálne. V zadaní sa ale nepíše, že by hľadaná funkcia musela byť spojitá. Navyše by sme určite nezadávali úlohu, ktorá by sa nedala riešiť bez použitia limít. Samozrejme, netreba zabudnúť na skúšku, lebo to, že žiadna iná funkcia nevyhovuje, ešte neznamená, že nájdená musí.

Autori vzorových riešení: Tomáš Babej, Žaneta Semanišinová, Kristína Mišlanová, Roman Staňo, Daniel Onduš, Martin Vodička, Jakub Genči

Konečné poradie Letného semestra 43. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1.	Dorota Porubská	S3	GLStöBJ	49	9	9	9	9	9	9	103
2.	Norbert Micheľ	S2	GPoštKE	54	9	9	9	-	4	9	98
3.	Matej Hanus	S3	GPoštKE	43	9	9	7	9	9	9	95
4.	Jakub Kliment	S2	GJGTBB	40	9	9	9	9	9	5	94
5.	Zdeněk Pezlar	S1	GJaroBR	43	9	1	9	-	7	9	87
6.	Peter Kochelka	S1	GJGTBB	39	9	9	9	-	8	2	85
7. - 8.	Dušan Oberta	S3	GŠkolSN	38	9	9	9	7	7	4	83
	Lenka Hake	S2	GAlejKE	45	9	9	9	-	7	2	83
9.	Adam Garafa	S1	GPoštKE	45	9	-	9	4	6	-	82
10.	Matej Kliment	S1	LEAFABA	43	9	6	9	-	4	-	80
11.	Martin Kliment	S1	GPoštKE	33	9	9	9	-	8	1	78
12. - 13.	Branislav Pastula	S3	GPoštKE	36	9	9	9	5	9	-	77
	Samuel Banas	S2	LEAFABA	42	9	9	9	-	8	-	77
14.	Matúš Masrna	S1	GPoštKE	40	9	-	9	-	9	-	76
15.	Radoslav Jochman	S1	GAlejKE	38	9	1	9	-	3	5	74
16.	Frederik Ténai	S2	GKatkKE	36	9	-	9	-	9	9	72
17.	Erik Novák	S1	GPoštKE	35	9	9	9	-	-	-	71
18.	Karin Eštoková	Z9	GMRŠKE	37	8	-	9	6	-	-	69
19.	Timea Szöllősová	S3	GAMČABA	35	9	8	9	6	-	-	67
20. - 21.	Gabriela Genčiová	S2	GPoštKE	27	9	9	9	-	6	3	66
	Miriam Horváthová	Z9	ZKomeMI	34	7	1	9	-	6	-	66
22.	Michal Vorobel	S2	GJARMPO	33	9	3	9	6	2	-	64
23.	Martin Nemjo	S2	GAlejKE	35	9	1	9	-	9	-	63
24. - 28.	Róbert Sabovčík	S3	GPoštKE	35	9	-	9	-	6	3	62
	Lujza Milotová	S2	GPoštKE	35	9	-	9	-	9	-	62
	Patrik Paľovčík	S3	GPoštKE	36	9	-	8	-	9	-	62
	Tomáš Chovančák	S3	GPoštKE	35	9	-	9	-	9	-	62
	Maximilián Pándy	S1	GPoštKE	44	-	-	9	-	-	-	62
29.	Tomáš Krupa	S3	GPoštKE	30	9	8	9	-	3	2	61
30.	Jakub Farbula	S2	GAlejKE	27	9	9	9	-	6	-	60
31. - 32.	Martin Albert Gbúr	S3	GPoštKE	33	9	-	9	-	8	-	59
	Sara Gašparová	Z9	GABerSC	31	9	1	9	-	-	-	59
33. - 37.	Michal Zummer	S1	SMládPP	33	1	0	9	4	1	1	58
	Dominika Nguyen	S2	GPoštKE	26	9	8	9	-	6	-	58
	Michal Masrna	S3	GPoštKE	34	9	-	6	-	9	-	58
	Benjamín Mravec	S3	GPoštKE	24	9	7	9	-	9	-	58
	Ela Vojtková	S1	GAMČABA	27	9	-	8	-	5	-	58
38.	Klára Hricová	S2	GPoštKE	22	9	8	9	-	9	-	57
39.	Timea Jakubócyová	S2	BGMHSuč	29	4	1	9	6	6	-	56
40.	Michal Farnbauer	S2	GAMČABA	25	9	9	5	-	6	-	54
41.	Paulína Dujavová	S1	GJARMPO	22	4	-	9	6	-	-	50
42.	Alex Blandón	S2	GPoštKE	29	8	9	-	-	-	-	46
43.	Michaela Rusnáková	S2	GAlejKE	35	9	-	1	-	-	-	45
44.	Martin Andričík	S2	GPoštKE	24	-	9	6	-	-	5	44
45. - 46.	Radovan Lascsák	S3	GPoštKE	32	7	-	4	-	-	-	43
	Štefan Vašak	Z9	ZKe30KE	14	9	-	9	-	2	-	43
47.	Ľubomír Vargovčík	Z9	ZKe30KE	16	9	-	8	-	-	-	42
48.	Petra Tereza Bukovinská	S1	GDoTaPP	19	-	-	9	-	-	-	37
49. - 50.	Ondrej Tomášik	S1	GJGTBB	18	-	-	9	-	-	-	36
	Matej Tarča	S3	GPoštKE	22	1	-	7	-	6	-	36
51. - 52.	Ján Richnavský	S2	GPoštKE	25	9	-	-	-	-	-	34
	Adam Džavoronok	Z9	ZSlobKE	34	-	-	-	-	-	-	34
53.	Adam Barla	S1	GJGTBB	10	-	-	9	-	-	-	28
54.	Pavol Liščinský	Z9	ZKro4KE	0	3	1	9	2	1	1	25

Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 6 • Máj 2019 • Letný semester 43. ročníka (2018/2019)
Internet:	`http://seminar.strom.sk`
E-mail:	`strom@strom.sk`
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	`https://zdruzenie.strom.sk`
E-mail:	`info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk