STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj!

Práve sa Ti dostal do rúk časopis STROMu! Je to matematický seminár, vďaka ktorému sa na konci polroka môžeš dostať preč zo školy na celý týždeň, počas ktorého zažiješ matematiku v netradičnej podobe a množstvo zaujímavých hier. Ak si stredoškolák, je presne pre Teba! Stačí vyriešiť dvanásť (či toľko, koľko dokážeš) nevšedných úloh, ktorých riešenie nám pošleš dvakrát za polrok, my ich opravíme, a ak budú dostatočne dobré, môžeš očakávať zážitky ako nikdy predtým! V tomto časopise nenájdeš len spomínané úlohy, ale aj pravidlá. Tešíme sa na Tvoje riešenia!

STROMáci

Košický Matboj

Aj tento rok sa môžete tešiť na ďalší ročník súťaže Košický Matboj, ktorý sa uskutoční 23. októbra 2020, samozrejme, ak to dovolí aktuálna situácia a epidemiologické opatrenia. Pozvánky s presnejšími informáciami spolu s inštrukciami na prihlasovanie rozpošleme na školy koncom septembra. V prípade záujmu si pravidlá, zadania a riešenia predchádzajúcich ročníkov môžete pozrieť už teraz na našej stránke `seminar.strom.sk/sk/matboj`. Dúfame, že sa budeme môcť stretnúť v čo najväčšom počte a tešíme sa na Vás.

Šifrovačka Kôš

Smútili ste celý rok, lebo ste nemali kam vyhodiť odpadky? Mysleli ste si, že vaše soboty boli nudné? Už sa viac netrápte, máme pre vás dobrú správu, pretože aj napriek súčasnej situácii vám aj tento rok ponúkame možnosť zmerať si svoje mentálne sily s kamarátmi, známymi, ale aj úplnými cudzincami. Preto neváhajte a príďte v sobotu, 24. 10., do Košíc. Od 9:00 do 17:00 budete mať možnosť prebiť sa 10 šiframi až do cieľa. Šifrovačka je rozdelená do dvoch kategórií, takže si na svoje prídu úplní začiatočníci, ale aj profíci. Zožeňte si najviac 5-členný tím a príďte sa zabaviť na Kôš. Viac informácií a registráciu nájdete na `bit.ly/sifrovackakos` a FB udalosť na `bit.ly/sifrovackakos2020fb`.

Pokyny pre riešiteľov

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov a riadi sa organizačným poriadkom zaregistrovaným na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2016-9485/41562:71-10E0.

Registrácia

Korešpondenčný matematický seminár STROM je jednou z aktivít národného projektu IT Akadémia – vzdelávanie pre 21. storočie (`itakademia.sk`). Pred tým ako odošleš prvé príklady (poštou, alebo elektronicky), je preto potrebné, aby si sa na túto aktivitu prihlásil.

Ak si sa zapojil do niektorej z našich aktivít v rámci projektu, tak už máš konto na portáli `registracia.itakademia.sk`. V takomto prípade stačí, ak sa prihlásiš na aktivitu Korešpondenčný matematický seminár STROM na tomto portáli.

Ak ešte nie si registrovaný v projekte, vyplň nám kontaktné údaje v dotazníku, ktorý nájdeš na stránke seminára, a my ti konto vytvoríme.

Registrácia je povinná, ak chceš, aby tvoje riešenia boli opravené. Vďaka tomu, že seminár je jednou z aktivít projektu, sú všetky aktivity v rámci neho pre teba bezplatné, a tak, ak sa budeš snažiť, budeš sa môcť zúčastniť sústredenia v Danišovciach bezplatne a pre najlepších troch riešiteľov sú pripravené knižné poukážky.

S registráciou nech ti pomôžu rodičia alebo učiteľ v škole. V prípade, že máš ty alebo tvoji rodičia, resp. učitelia akékoľvek otázky k registrácii, neváhajte nás kontaktovať e-mailom na `sutaze@itakademia.sk`.

Prihlásenie do semestra

Prihlásenie do semestra prebieha online, na našej webovej stránke `seminar.strom.sk`. Ak si novým riešiteľom, alebo ešte nemáš vytvorený účet, zaregistruj sa a vyplň povinné údaje v užívateľskom profile – odkaz `Aktualizovať profil` v sekcii `Správa účtu`. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s Tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole (prázdniny, ...), v prípade pozývania na sústredenie a tiež, aby sme ťa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti seminára. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia, bez ohľadu na to, ako si ich poslal.

Prihláška (vyplnenie profilu) je **povinná pre všetkých riešiteľov**. Úlohy, ktoré sa nedajú priradiť k užívateľovi s korektne vyplneným profilom, **nebudú opravené**.

Ako písať riešenie

Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeniach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete posielať poštou alebo cez našu webovú stránku, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotené bodmi. Preto zvážte, či nenapíšete svoje riešenia na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

Združenie Strom, PF UPJŠ, Jesenná 5, 041 54 Košice.

Elektronické odovzdávanie je možné do uvedeného termínu cez nový webový portál na stránke `seminar.strom.sk`. Súbor s riešením odovzdáte jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu – tlačidlo `Odovzdať` pri konkrétnom príklade v sekcii `Príklady`. Úlohy odovzdávajte primárne vo formáte PDF, portál na vaše riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC.

Jedine **v prípade technických problémov** na našej strane je možné poslať riešenia vo formáte PDF (riešenia v inom formáte nebudú akceptované) na e-mailovú adresu `riesenia.strom@strom.sk`.

Riešenie každej úlohy píšte na **samostatný papier formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás prostredníctvom komentárom k úlohám na našej stránke, cez e-mail `strom@strom.sk` alebo osobne.

Bodovanie

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

štvrtáci, oktáva:	všetky vyriešené úlohy
tretiaci, septima:	všetky vyriešené úlohy
druháci, sexta:	päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh
prváci, kvinta a mladší:	päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

Príklad použitia pravidiel

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za $3, 2, 4, 1, 5$ a 4 body. Vlado potom získal $3+2+4+1+5+4 = 19$ bodov, Fero tiež získal $3+2+4+1+5+4 = 19$ bodov Jaro $(3+\underline{2}+4+5+4)+2 = 20$ bodov a Marcel $(3+2+4+\underline{5}+4)+5 = 23$ bodov. Jasné, nie?

Riešenia po termíne

V prípade, že svoje riešenie pošleš po termíne odovzdania, riešenie ti opravíme len v prípade, že nám bude doručené doštyroch dní od termínu série. V tomto prípade ti za oneskorenie strhneme body. Body sa strhávajú nasledovne, podľa dĺžky omeškania:

- do 24 h: $2/3$ bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako 24h a do štyroch dní: $1/2$ bodov zaokrúhlené nahor
- viac ako štyri dni: riešenie neopravujeme

Vo výnimočných prípadoch môžeme body za riešenie neznížiť.

Varovanie !!!

Riešenie založené na využití výpočtovej techniky spravidla nebude ohodnotené vysokým počtom bodov. Hodnotené budú len tie časti riešenia, ktorých správnosť je možné overiť v primeranom čase.
Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešení zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrená.

Hlasy

Okrem bodov môžete získať aj hlasy. Kladné hlasy môžete získať za pekné a originálne riešenia úloh a riešiteľov s najväčším počtom hlasov na konci semestra odmeníme. Avšak môžeme udeliť aj záporné hlasy, napríklad za odpisovanie alebo veľmi neelegantné riešenie (napríklad skúšanie obrovského počtu možností pomocou programu, riešenie z literatúry) a riešiteľov, ktorí budú mať na konci semestra -3 hlasy alebo menej, môžeme nepozvať na sústredenie, aj v prípade, že by na to mali dostatok bodov.

Sústredenie

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastňujú sa ho riešitelia korešpondenčných sérií na základe poradia po korešpondenčných sériách danej časti ročníka. Sústredenia sa môžu zúčastniť aj úspešní riešitelia iných matematických súťaží organizovaných PF UPJŠ v Košiciach a Združením STROM, ak to kapacitné možnosti umožnia. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im príslušných ročníkov na osemročnom gymnáziu), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškolákmi) sú pozvaní ako náhradníci. Ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia Stromu, nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou.

Zadania úloh zimného semestra 45. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `seminar.strom.sk`.

1 Prvá séria

Termín odovzdania riešení: **12. októbra 2020**

1. Pre každé celé číslo n od 1 do 100 vrátane si na papier napíšeme najmenšie číslo, ktoré má práve n deliteľov. Koľko z týchto čísel bude deliteľných troma?

2. Nech P je konečná množina bodov v rovine, nie nutne vo všeobecnej polohe (t.j. môže sa stať, že na priamke leží tri a viac bodov). Predpokladajme, že množina P spĺňa to, že v konvexnom obale každých piatich bodov (konvexný obal je najmenší konvexný útvar obsahujúci dané body), ale nie na jeho hranici, leží aspoň jeden ďalší bod. Dokážte, že potom každý konvexný päťuholník Q určený bodmi z P obsahuje aspoň jeden bod z P vo vnútornom päťuholníku určenom uhlopriečkami päťuholníka Q.

3. Do školy chodí niekoľko chlapcov a dievčat. Existuje kladné celé číslo $k \geq 2$ také, že každý chlapec sa rozpráva s práve k dievčatami a každé dievča sa rozpráva s práve k chlapcami, pričom rozprávanie sa je vzájomné a chlapci ani dievčatá sa medzi sebou nerozprávajú. Keď sa žiak dozvie klebetu, povie ju všetkým žiakom, s ktorými sa rozpráva, a ak sú v škole všetci, dozvie sa každú klebetu každý. Dano, ktorý je jeden zo žiakov, dnes jediný neprišiel do školy. Ukážte, že aj tak sa klebeta od ľubovoľného žiaka v škole dostane ku každému inému žiakovi v škole.

4. Na kružnici k ležia postupne body A, X, B, C a D, pričom $|AX| = |BX|$. Nech M je priesečník priamok XC a BD a nech N je priesečník XD a AC. Ďalej nech K a L sú body, v ktorých priamka MN pretína kružnicu k. Dokážte, že $|KX| = |LX|$.

5. Majme kladné reálne čísla x, y, z, pre ktoré platí: $x + y + z \leq 4$ a $xy + yz + zx \geq 4$. Ukážte, že aspoň 2 z nerovností $|x - y| \leq 2$, $|y - z| \leq 2$, $|z - x| \leq 2$ platia.

6. Na úsečke AC zvolíme ľubovoľne jej vnútorný bod B. Zostrojme postupne kružnice k_1, k_2, k nad priemermi AB, BC, AC. Bodom B veďme ľubovoľnú priamku p, ktorá pretína kružnicu k v bodoch P, Q a kružnice k_1, k_2 v bodoch R, T. Dokážte, že platí $|PR| = |QT|$.

2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **16. novembra 2020**

1. Mihál má váhu, na ktorú dáva kladné celé čísla. Na začiatku má na každej strane nejaké kladné celé číslo. V každom kroku zvolí ďalšie kladné celé číslo, ktoré pripočíta k číslu na ľavej strane a ktorým vynásobí číslo na pravej strane. Mihál je šťastný, ak sú po nejakom počte krokov obe čísla rovnaké. Ukážte, že ak je na začiatku na pravej strane váhy číslo $a \geq 2$, tak vie Mihál dosiahnuť rovnosť čísel vykonaním nanajvýš $a - 1$ krokov.

2. Nájdite najmenšie reálne číslo p, pre ktoré pre ľubovoľnú dvojicu kladných reálnych čísel a, b platí

$$a + b - p\sqrt{ab} \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

3. Na stole je m modrých a z zelených kamienkov (m a z sú kladné celé čísla). Timka a Žanetka hrajú hru a striedajú sa v ťahoch, pričom Timka začína. Hráčka vo svojom ťahu odoberie k kamienkov jednej farby zo stola, pričom k musí byť deliteľ počtu kamienkov danej farby, ktoré sú pred začatím tohto ťahu na stole. Tá, ktorá zoberie posledný kamienok, vyhráva. Zistite, ktorá z nich má víťaznú stratégiu a popíšte ju.

4. Nech n je kladné celé číslo. *Obyčajný štvorec* rádu n je štvorec, v ktorom je v každom z n^2 políčok napísané nejaké číslo od 1 do n. *Stromácky štvorec* rádu n je obyčajný štvorec, v ktorom je v každom stĺpci a každom riadku každé číslo od 1 do n práve raz. Dva štvorce S_1 a S_2 rádu n sa *kamarátia*, ak platí, že pre každú dvojicu kladných celých čísel (a, b), $a, b \in \{1, \ldots, n\}$, nájdeme nejakú pozíciu (i, j), $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, v štvorci rádu n takú, že S_1 má na políčku na pozícii (i, j) číslo a a S_2 má na políčku (i, j) číslo b. Ukážte, že pre dané kladné celé čísla m a n platí: m stromáckych štvorcov rádu n takých, že sa každá dvojica kamaráti, existuje práve vtedy, keď existuje $m+2$ obyčajných štvorcov rádu n takých, že sa každá dvojica kamaráti.

5. Sú dané navzájom rôzne body A, B, C, D také, že uhly ACB a ADB sú pravé. Označme E priesečník priamok AC a BD a F priesečník priamok AD a BC. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ACF a ADE sa pretínajú na priamke AB.

6. Nájdite všetky dvojice reálnych funkcií l, r spĺňajúcich, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$l(x - y) = l(x)r(y) + l(y)r(x).$$

a) Úlohu vyriešte za predpokladu, že $l(0) \neq 0$.

b) Úlohu vyriešte za predpokladu, že $l(0) = 0$.

Autori zadaní úloh: Viktória Brezinová, Jakub Genči, Martin Masrna, Martin Mihálik, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Žaneta Semanišinová, Martin Števko

Mohlo by sa hodiť

Geometria

Tálesova veta

Trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C práve vtedy, keď AB je priemerom kružnice opísanej trojuholníku ABC.

Veta o obvodovom a stredovom uhle

Majme oblúk AB na kružnici so stredom S. Uhol ASB sa nazýva stredový uhol k oblúku (nad tetivou) AB. Nech X je ľubovoľný bod na dlhšom oblúku AB, potom uhol AXB sa nazýva obvodový k oblúku (nad tetivou) AB a jeho veľkosť je rovnaká pre každú polohu bodu X, a to polovica veľkosti príslušného stredového uhla.

Tetivový štvoruholník

Tetivový štvoruholník je taký, ktorému sa dá opísať kružnica. Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď je súčet veľkostí jeho protiľahlých vnútorných uhlov 180°.

Mocnosť bodu ku kružnici a chordála

Majme v rovine bod M a danú kružnicu k so stredom S a polomerom r. Mocnosť bodu M ku kružnici k nazývame reálne číslo $m = v^2 - r^2$, kde $v = |MS|$. Dá sa ukázať, že ak je bod M vo vonkajšej (resp. vnútornej) oblasti kružnice a p je ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom M, ktorá pretína kružnicu k v bodoch P, Q, platí $m = |MP||MQ|$ (resp. $m = -|MP||MQ|$). Je zaujímavé, že tento súčin je rovnaký bez ohľadu na priamku p a je určený len bodom M a kružnicou k.
Majme teraz v rovine 2 kružnice k, l. Chordálou dvoch kružníc nazývame množinu všetkých bodov, ktoré majú rovnakú mocnosť k obom kružniciam. Dá sa ukázať, že chordálou dvoch nesústredných kružníc je vždy priamka kolmá na spojnicu ich stredov. Odtiaľ ľahko vyplýva, že chordálov dvoch pretínajúcich sa kružníc bude priamka určená ich priesečníkmi.
Viac o tejto téme sa môžete dozvedieť napr. z materiálu na tejto adrese:
`prase.cz/library/MocnostAChordalyJT/MocnostAChordalyJT.pdf`

Dirichletov princíp

Majme n predmetov a m priehradok. Chceme poukladať predmety do priehradok tak, aby každý predmet bol v práve jednej priehradke. Dirichletov princíp je jednoduché tvrdenie, že ak je $n > m$ (predmetov viac ako priehradok), tak potom v aspoň jednej priehradke budú aspoň dva predmety (v silnejšej verzii vieme tvrdiť, že pri n priehradkach a aspoň $kn+1$ predmetoch (pre prirodzené k) existuje priehradka s $k+1$ predmetmi).

Nerovnosti

AG nerovnosť

Pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí, že ich aritmetický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$), ich geometrickému priemeru, t.j.

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Funkcionálne rovnice

Táto tématika sa na stredných školách veľmi nevyučuje, ale nie je to nič komplikované. Úlohou je len nájsť všetky funkcie, ktoré budú spĺňať zadanie. Najsilnejšia zbraň, ktorú máme v rukách, je to, že hľadaná funkcia spĺňa danú rovnosť pre všetky hodnoty premenných z jej definičného oboru. Preto môžeme funkcionálnu rovnicu riešiť tak, že skúsime za x a y dosádzať konkrétne hodnoty alebo výrazy. Takto odvodíme nutné podmienky, ktoré musí hľadaná funkcia spĺňať. Nejde však o podmienky postačujúce, a preto je potrebné výslednú funkciu do rovnice dosadiť a urobiť skúšku. Viac o tom, ako riešiť takéto úlohy, nájdete napríklad tu: `old.kms.sk/~mazo/matematika/funkcionalne_rov.pdf`.

Názov: STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 1 • September 2020 • Zimný semester 45. ročníka (2020/2021)
Web: seminar.strom.sk
E-mail: strom@strom.sk
Riešenia: Prijímame poštou, na webe a v prípade poruchy stránky na riesenia.strom@strom.sk

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: zdruzenie.strom.sk
E-mail: info@strom.sk

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk