STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj!

Je tu ďalší časopis STROMu, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Žiaľ, aj napriek tomu, že je posledným v semestri, pozvánky na sústredenie s ním neprichádzajú. Situácia je aj naďalej komplikovaná, preto sme usúdili, že je bezpečnejšie v zime sústredenia neorganizovať. Je však možné, že sa situácia v priebehu školského roka zlepší. V takom prípade sa nemusíš báť (ak si sa dostal medzi najlepších) – informácie o prípadnom sústredení sa k Tebe určite dostanú. Avšak, nenechávame to len tak – v čase zimných sústredení sa predsa len niečo bude diať. Bude to pravdepodobne na čiare (online) a bude to zaujímavé. Tak nezabudni sledovať novinky na stránke, tam sa dozvieš všetko potrebné.

STROMáci

1.

Opravovali: **Maťo Gbúr a Peťo Kovács**
Počet riešení: 38

Mihál má váhu, na ktorú dáva kladné celé čísla. Na začiatku má na každej strane nejaké kladné celé číslo. V každom kroku zvolí ďalšie kladné celé číslo, ktoré pripočíta k číslu na ľavej strane a ktorým vynásobí číslo na pravej strane. Mihál je šťastný, ak sú po nejakom počte krokov obe čísla rovnaké. Ukážte, že ak je na začiatku na pravej strane váhy číslo $a \geq 2$, tak vie Mihál dosiahnuť rovnosť čísel vykonaním nanajvýš $a - 1$ krokov.

Riešenie

Označme číslo na ľavej strane váhy ako b. Potom vieme rozobrať tri prípady podľa toho, či je a menšie, rovné alebo väčšie ako b.
V prípade $b = a$, má úloha triviálne riešenie, keďže rovnosť už nastala a Mihál je spokojný.
Ak $b < a$, vieme rovnosť dosiahnuť tak, že budeme k ľavej strane pripočítavať jednotku a pravú násobiť jednotkou. Hodnota na pravej strane sa tým pádom nezmení a na ľavej strane sa po $a - b$ krokoch objaví číslo a a nastane rovnosť. Nakoľko b je aspoň 1, najväčší možný počet krokov, ktorými touto metódou určite uspokojíme Mihála je $a - 1$.

Teraz rozoberme možnosť $b > a$. Nech k je najmenšie prirodzené číslo také, aby $b + k \leq a \cdot k$. Ako prvý krok pripočítajme toto číslo na ľavú stranu a vynásobme ním pravú stranu. Ak sa ľavá strana rovná pravej, tak je Mihál spokojný. Ak je ľavá strana menšia ako pravá, môžeme odteraz pokračovať podobne ako v prípade $a > b$. Na ľavú stranu budeme pridávať 1 a pravú násobiť jednotkou dokým nenastane rovnosť. Potrebujeme už len overiť, či vieme rovnosť vždy dosiahnuť za nie viac ako $a - 2$ krokov, inými slovami či je rozdiel ak a $b + k$ rovný alebo menší ako $a - 2$.

Pokúsime sa ukázať, že pre čísla spĺňajúce predchádzajúce podmienky platí $ak - (b + k) \leq a - 2$. Spomeňme si, že k bolo najmenšie číslo také, aby ľavá strana bola menšia alebo rovná pravej. Teda pre $k - 1$ to už platiť nebude. To znamená, že ak by sme miesto k na ľavú stranu pripočítali $k - 1$ a pravú týmto číslom vynásobili, platila by nerovnosť $b + k - 1 > a \cdot (k - 1)$. Túto rovnicu ďalej upravujme:

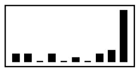
$$
\begin{aligned}
b + k - 1 &> a \cdot (k - 1) \\
b + k - 1 &> ak - a \\
a - 1 &> ak - (b + k)
\end{aligned}
$$

Zistili sme, že rozdiel ak a $b + k$ je menší ako $a - 1$, čiže nie je väčší ako $a - 2$. Ukázali sme, že aj v tomto prípade vieme Mihála uspokojiť najviac $a - 1$ krokmi.

Komentár

Takmer všetkým riešiteľom sa podarilo úlohu vyriešiť správne. Body sme zvyčajne boli nútení stiahnuť za nedostatočné dokázanie krokov v riešení.

2. Opravovali: **Kubo Genči a Timka Szöllősová**
Počet riešení: 26



Nájdite najmenšie reálne číslo p, pre ktoré pre ľubovoľnú dvojicu kladných reálnych čísel a, b platí

$$a + b - p\sqrt{ab} \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Riešenie

Keďže nerovnosť má platiť pre všetky reálne a, b, dosaďme si $a = b = 1$.

$$\begin{gathered}1 + 1 - p\sqrt{1 \cdot 1} \leq \sqrt{1^2 + 1^2} \\ 2 - p \leq \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \leq p\end{gathered}$$

Vidíme, že pre $a = b = 1$ je p najmenej $2 - \sqrt{2}$, čiže aj najmenšie p, pre ktoré platí nerovnosť, nemôže byť menšie. Ukážme si teraz, že $p = 2 - \sqrt{2}$ je vyhovujúce pre všetky a, b, a teda je to skutočne najmenšie p vyhovujúce zadaniu. Predpokladajme spor:

$$\begin{gathered}a + b - (2 - \sqrt{2})\sqrt{ab} > \sqrt{a^2 + b^2} \\ a + b - 2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab} > \sqrt{a^2 + b^2} \\ a + b + \sqrt{2ab} > \sqrt{a^2 + b^2} + 2\sqrt{ab}\end{gathered}$$

Všimnime si, že obe strany sú kladné, keďže a aj b sú kladné, a teda všetky členy nerovnosti sú kladné. Z toho plynie, že nerovnosť môžeme umocniť na druhú.

$$\begin{gathered}a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)\sqrt{2ab} + 2ab > a^2 + b^2 + 4\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{ab} + 4ab \\ 2(a + b)\sqrt{2ab} > 4\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{ab} \\ (a + b)\sqrt{2ab} > 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{ab}\end{gathered}$$

Uvedomme si, že obe strany nerovnosti sú kladné, rovnako ako minule, a zároveň aj $\sqrt{2ab}$ je kladné, teda po predelení týmto výrazom sa to nezmení a stále budeme môcť nerovnosť umocniť.

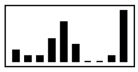
$$\begin{gathered}(a + b)\sqrt{2} > 2\sqrt{a^2 + b^2} \\ 2a^2 + 4ab + 2b^2 > 4a^2 + 4b^2 \\ 4ab > 2a^2 + 2b^2 \\ 0 > 2a^2 - 4ab + 2b^2 \\ 0 > 2(a - b)^2\end{gathered}$$

Vieme však, že štvorec ľubovoľného čísla je kladný (aj po prenásobení dvoma) a teda dostávame želaný spor.

Komentár

Ako iste vidíte, táto úloha nebola myšlienkovo ťažká. Pre istotu si však vždy overte, ktoré ekvivalentné úpravy môžete urobiť. Dokonca aj vtedy, keď to plynie zo zadania. Nezabúdajte však pri tom na to, že ak máte ako parameter reálne číslo, ten môže mať znamienko, ktoré sa vám nehodí.

3. Opravovali: **Martin Masrna a Viki Brezinová**
Počet riešení: 28



Na stole je m modrých a z zelených kamienkov (m a z sú kladné celé čísla). Timka a Žanetka hrajú hru a striedajú sa v ťahoch, pričom Timka začína. Hráčka vo svojom ťahu odoberie k kamienkov jednej farby zo stola, pričom k musí byť deliteľ počtu kamienkov danej farby, ktoré sú pred začatím tohto ťahu na stole. Tá, ktorá zoberie posledný kamienok, vyhráva. Zistite, ktorá z nich má víťaznú stratégiu a popíšte ju.

Riešenie

Zapíšme si počty kamienkov na kôpkach ako $m = 2^a x$ a $z = 2^b y$, pričom x, y sú nepárne prirodzené čísla, a 2^a, resp. 2^b je najväčšia mocnina dvojky, ktorá delí m, resp. z (v prípade, že je m alebo z nepárne, tak je to 2^0). Z prvočíselného rozkladu čísla je zjavné, že každé prirodzené číslo vieme zapísať v takomto tvare práve jedným spôsobom.

Hru si rozdelíme do dvoch stavov: vyrovnaný − ak $a = b$ a nevyrovnaný − ak $a \neq b$ (teda pri vyrovnanom je najväčšia mocnina dvojky, ktorá delí počet kamienkov na kôpke rovnaká pre obe kôpky a pri nevyrovnanom je rôzna).

Najprv si ukážeme, že ak je hra v nevyrovnanom stave, tak hráč na ťahu vie odobrať taký počet kamienkov, aby sa po tomto ťahu hra dostala do vyrovnaného stavu. Bez ujmy na všeobecnosti si určme, že $a > b$ a odoberme 2^b kamienkov z prvej kôpky, kde ich je $2^a x$. Určite ich toľko odobrať môžeme, lebo 2^b delí 2^a, a teda aj $2^a x$. Pozrime sa, koľko kamienkov nám zostalo na prvej kôpke:

$$2^a x - 2^b = 2^b(2^{a-b}x - 1)$$

Vieme, že $(2^{a-b}x - 1)$ je nepárne číslo, lebo $2^{a-b}x$ je určite párne číslo a odčítaním jednotky dostaneme nepárne číslo. Preto najväčšia mocnina dvojky, ktorá delí počet kamienkov na prvej kôpke je 2^b a teda hra sa dostala do vyrovnaného stavu.

Teraz si ukážeme, že ak je hra vo vyrovnanom stave, tak po hráčovom ťahu sa vždy dostane do nevyrovnaného stavu, bez ohľadu na to, koľko kamienkov sa rozhodne odobrať. Bez ujmy na všeobecnosti poďme odoberať kamienky z prvej kôpky. Všetky delitele čísla $2^a x$ sa dajú zapísať ako $2^c d$, pričom $c \leq a$ a d delí x. Pozrime sa, koľko kamienkov zostane na prvej kôpke po ľubovoľnom ťahu:

$$2^a x - 2^c d = 2^c(2^{a-c}x - d)$$

Vieme, že d je určite nepárne, keďže je to deliteľ nepárneho x. Rozdeľme si to na dva prípady: $c = a$ a $c < a$. Ak $c = a$, tak nahraďme a za c:

$$2^c(2^{a-c}x - d) = 2^a(x - d)$$

Vieme, že $x - d$ je rozdiel dvoch nepárnych čísel, čiže párne číslo. Preto 2^{a+1} určite delí $2^a(x - d)$, a teda dostali sme sa do nevyrovnaného stavu.

Ak $c < a$, tak $(2^{a-c}x - d)$ je rozdiel párneho a nepárneho čísla, čo je nepárne číslo a teda najväčšia mocnina dvojky, čo delí počet kamienkov na prvej kôpke, kde ich je $2^c(2^{a-c}x - d)$ musí byť $2^c < 2^a$. Opäť sme sa dostali do nevyrovnaného stavu.

Ako nám to pomôže pri hľadaní víťaznej stratégie? V prvom rade si môžeme uvedomiť, že ak je jedna kôpka prázdna a druhá nie, tak je hra v nevyrovnanom stave a hráč, ktorý je na ťahu vie vyhrať. Stačí mu zobrať všetky kamienky z neprázdnej kôpky, čo môže urobiť, lebo každé číslo delí samé seba.

Druhá dôležitá vec je, že hráč má víťaznú stratégiu vtedy, ak vie postupovať tak, že bez ohľadu na to, čo vo svojom ťahu spraví súper, tak aj tak vyhrá. Z toho, čo sme si ukázali vyššie je jasné, že hráč, ktorý je na ťahu v nevyrovnanom stave vie vždy hru dostať do vyrovnaného stavu a hráč, čo je na ťahu vo vyrovnanom stave ju vždy dostane späť do nevyrovnaného stavu bez ohľadu na to, čo urobí.

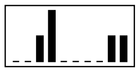
Preto, ak je na začiatku hra v nevyrovnanom stave, tak víťaznú stratégiu má prvý hráč. Vždy vo svojom ťahu odoberie kamienky tak, aby sa hra dostala do vyrovnaného stavu. Po ťahu druhého hráča sa hra vždy dostane späť do nevyrovnaného stavu. Keďže po každom ťahu sa celkový počet kamienkov zníži, tak raz sa hra dostane do stavu, keď je jedna kôpka prázdna a to je nevyrovnaný stav, takže vtedy bude na ťahu prvý hráč a vie vyhrať. Naopak, ak je na začiatku hra vo vyrovnanom stave, tak víťaznú stratégiu má druhý hráč, lebo po prvom ťahu sa hra ocitne v nevyrovnanom stave a na ťahu je druhý hráč, ktorý sa teraz ocitne v situácii prvého hráča, ktorý začína hru v nevyrovnanom stave.

Komentár

Takmer všetkým sa vám podarilo vyriešiť prípady, pokiaľ aspoň jedno z čísel m, z je nepárne - stačilo si uvedomiť, že nepárne číslo môže mať iba nepárne násobky. Prípad, kedy sú obe čísla párne, sa ukázal byť náročnejší. Tí z vás, ktorí prišli na myšlienku s mocninami dvojky, väčšinou zvládli riešenie úspešne dotiahnuť do konca. Pri podobných úlohách je dôležité aj popísať konkrétnu víťaznú stratégiu v závislosti od m, z, nie iba to, kto ju má. Väčšina z vás na to však nezabudla, čo nás samozrejme veľmi teší.

4. Opravovali: **Dano Onduš a Žanetka Semanišinová**

Počet riešení: 5



Nech n je kladné celé číslo. *Obyčajný štvorec* rádu n je štvorec, v ktorom je v každom z n^2 políčok napísané nejaké číslo od 1 do n. *Stromácky štvorec* rádu n je obyčajný štvorec, v ktorom je v každom stĺpci a každom riadku každé číslo od 1 do n práve raz. Dva štvorce S_1 a S_2 rádu n sa *kamarátia*, ak platí, že pre každú dvojicu kladných celých čísel (a, b), $a, b \in \{1, \dots, n\}$, nájdeme nejakú pozíciu (i, j), $i, j \in \{1, \dots, n\}$, v štvorci rádu n takú, že S_1 má na políčku na pozícii (i, j) číslo a a S_2 má na políčku (i, j) číslo b. Ukážte, že pre dané kladné celé čísla m a n platí: m stromáckych štvorcov rádu n takých, že sa každá dvojica kamaráti, existuje práve vtedy, keď existuje $m + 2$ obyčajných štvorcov rádu n takých, že sa každá dvojica kamaráti.

Riešenie

Rozmyslime si najprv, čo hovorí zadanie. (Ak to máte rozmyslené, túto časť vzoráku kľudne preskočte). Obyčajné štvorce sú ľubovoľné štvorce $n \times n$ vyplnené číslami z množiny $\{1, \dots, n\}$. Stromácke štvorce (väčšinou sa im hovorí *latinské*) sú obyčajné štvorce, ktoré navyše spĺňajú, že v každom riadku aj v každom stĺpci obsahujú všetky čísla od 1 do n. Záludný vzťah kamarátenia sa medzi dvoma štvorcami S_1 a S_2 znamená, že keď pôjdeme postupne po políčkach štvorcov a vždy si zapíšeme do dvojice čísla na príslušnom políčku v S_1 a S_2, nakoniec dostaneme všetky možné dvojice. Dvojíc je dohromady n^2, takže vtedy dostaneme každú práve raz. Teraz si už ľahko si rozmyslíme, že kamarátstva sú vzájomné a tiež, že ak chceme, aby mal nejaký štvorec kamarátov, tak každé číslo $a \in \{1, \dots, n\}$ musí obsahovať práve n-krát, pretože existuje práve n dvojíc (a, b), kde b je číslo od 1 po n.

Ukážeme najprv ľahšiu implikáciu. Majme m stromáckych štvorcov, ktoré sa všetky navzájom kamarátia. Ukážeme, že existuje $m + 2$ obyčajných štvorcov, ktoré sa navzájom kamarátia. Najprv si všimneme, že m štvorcov už máme, pretože všetky stromácke štvorce sú obyčajné. Ďalšie dva štvorce zvolíme nasledovne: Štvorec R bude spĺňať, že v i-tom riadku má všetky hodnoty i a štvorec S bude spĺňať, že v j-tom stĺpci má všetky hodnoty j $(i, j \in \{1, \dots, n\})$. Na obrázku sú štvorce R a S pre $n = 3$.

1	1	1
2	2	2
3	3	3

1	2	3
1	2	3
1	2	3

Štvorec R sa kamaráti so všetkými m stromáckymi štvorcami, pretože stromácke štvorce obsahujú v každom riadku všetky čísla od 1 po n, teda keď prechádzame políčka po riadkoch, v prvom riadku dostávame všetky dvojice začínajúce 1, v druhom riadku začínajúce 2 a tak ďalej. Z rovnakého dôvodu sa štvorec R kamaráti so štvorcom S. Analogický argument pri prechádzaní po stĺpcoch ukazuje, že štvorec S sa kamaráti so všetkými m stromáckymi štvorcami. Teda sme našli $m + 2$ navzájom sa kamarátiacich obyčajných štvorcov.

Pustime sa teda do opačnej implikácie. Máme $m + 2$ obyčajných štvorcov, ktoré sa navzájom kamarátia a chceme ukázať, že existuje m stromáckych štvorcov, ktoré sa navzájom kamarátia. Rozmyslime si najprv, že ak by dva z týchto štvorcov boli R a S, tak by zvyšných m štvorcov boli stromácke štvorce a boli by sme hotoví. Je to tak preto, že ak sa štvorec T kamaráti so štvorcom R, tak má v i-tom riadku všetky čísla od 1 po n, inak by nám chýbala nejaká dvojica tvaru (a, i) a štvorce by sa nekamarátili. To platí pre všetky i, takže štvorec T má v každom riadku všetky čísla od 1 po n. Podobne, ak sa T kamaráti s S, tak má v každom stĺpci všetky čísla od 1 po n. Teda ak sa T kamaráti so štvorcami R a S, tak je to stromácky štvorec.

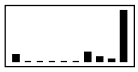
Zostáva si rozmyslieť, že z akýchkoľvek $m + 2$ obyčajných štvorcov, ktoré sa navzájom kamarátia, vieme dostať $m + 2$ štvorcov, medzi ktorými sú štvorce R a S, a kamarátstva zostanú zachované. Na to si stačí všimnúť, že keď prehodíme hodnoty v ľubovoľných dvoch políčkach vo všetkých $m + 2$ štvorcoch naraz, všetky štvorce ostanú kamaráti (akurát pri kontrolovaní kamarátstva budú tieto dve dvojice v našom zozname prehodené).

Vezmime si teda nejaký štvorec z našich $m + 2$ štvorcov. Keďže tento štvorec má nejakých kamarátov, tak z pozorovania v úvode vieme, že obsahuje každé číslo n-krát. Poprehadzujme v ňom (a súčasne aj vo všetkých ostatných štvorcoch) hodnoty tak, aby sa z neho stal štvorec R. Vezmime si teraz nejaký ďalší štvorec (s už poprehadzovanými hodnotami). Keďže sa kamaráti so štvorcom R, tak má v každom riadku všetky čísla od 1 po n. V každom z jeho riadkov poprehadzujeme hodnoty tak, aby sme dostali štvorec S (z predchádzajúcej vety vieme, že to ide). Keď súbežne s ním budeme prehadzovať aj zvyšné štvorce (vrátane R), tak kamarástva zachováme a zároveň nezmeníme štvorec R, pretože prehadzujeme len v rámci riadkov. Po týchto dvoch krokoch sme dostali $m + 2$ štvorcov, ktoré sa navzájom kamarátia a zahŕňajú štvorce R a S, takže zvyšných m štvorcov je stromáckych, špeciálne, m stromáckych štvorcov existuje.

Komentár

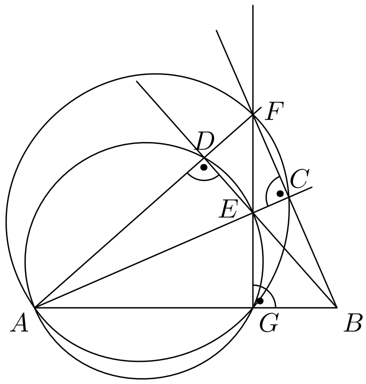
Úloha mala síce dlhé zadanie, ale v skutočnosti vôbec nebola tak ťažká, ak ste zadanie dočítali do konca. Ukázať ľahšiu implikáciu by zvládol asi každý z vás, preto je nám ľúto, že ste sa do úlohy nepustili. Navyše ľahšia implikácia poskytovala užitočný návod, ako sa vysporiadať s tou ťažšou implikáciou, a teda dotiahnuť úlohu do úspešného konca. Nenechajte sa preto odradiť dlhým zadaním, zadanie je snaha napísať tak, aby bolo jasné, čo sa v úlohe myslí, ale to neznamená, že obsahuje nejaký zložitý koncept.

5. Opravovali: **Samo Krajči a Mimi Hanus**
Počet riešení: 32



Sú dané navzájom rôzne body A, B, C, D také, že uhly ACB a ADB sú pravé. Označme E priesečník priamok AC a BD a F priesečník priamok AD a BC. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ACF a ADE sa pretínajú na priamke AB.

Riešenie



Priamka AE (AC) je kolmá na BF (BC) a AF (AD) je kolmá na BE (BD). Preto sú AF a BF výšky v trojuholníku ABE (výšky chápeme ako priamky), F je ortocentrum a EF je kolmá na AB. Označme ich priesečník G. G a C vidia úsečku AF pod pravým uhlom, takže patria kružnici nad AF. Podobne G a D ležia na kružnici nad AE. Následne kružnice spomínané v zadaní sa pretínajú v G na AB.

Iné riešenie

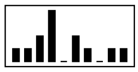
CE (AC) je kolmá na CF (BC) a DE (BD) je kolmá na DF (AD), čiže C a D ležia na kružnici nad EF. Z mocnosti B k tejto kružnici $|BC||BF| = |BD||BE|$, teda mocnosti B ku kružniciam opísaným ACF a ADE sa rovnajú. Ich priesečník A má k obom rovnakú nulovú mocnosť, odkiaľ je AB chordálou a obsahuje všetky spoločné body.

Komentár

Často sa deje, že pri geometrických úlohách zabudnete na diskusiu, teda nezvážite všetky možné konfigurácie bodov. V tejto úlohe to však bolo presne naopak. Mnoho z vás vyriešilo úlohu tak, že si ich riešenie nevyžadovalo diskusiu, pretože fungovalo pre ľubovoľnú konfiguráciu, no neuvedomili si to a celkom zbytočne úlohu riešili znova pre mierne inú konfiguráciu, pričom nájdené riešenie bolo často rovnaké, alebo, v horšom prípade, zlé, čím stratili body.

6. Opravovali: **Martin Vodička a Robka Juríková**

Počet riešení: 13



Nájdite všetky dvojice reálnych funkcií l, r spĺňajúcich, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$l(x-y) = l(x)r(y) + l(y)r(x).$$

a) Úlohu vyriešte za predpokladu, že $l(0) \neq 0$.

b) Úlohu vyriešte za predpokladu, že $l(0) = 0$.

Riešenie

Začneme užitočným pozorovaním, že funkcia l musí byť párna. Totiž pre ľubovoľné t máme z dosadení $x = t$, $y = 0$ a $x = 0$, $y = t$ nasledujúcu rovnosť:

$$l(t) = l(t-0) = l(t)r(0) + l(0)r(t) = l(0)r(t) + l(t)r(0) = l(0-t) = l(-t)$$

Teraz sa môžeme pozrieť na jednotlivé časti úlohy.

a) Dosaďme do rovnice zo zadania $x = y$. Dostávame, $l(0) = 2l(x)r(x)$. Z nenulovosti $l(0)$ vidíme, že $l(x)$ aj $r(x)$ sú nenulové pre všetky hodnoty x. Preto môžeme vyjadriť $r(x) = l(0)/2l(x)$. Z toho vyplýva, že aj funkcia r musí byť párna.

Dosaďme teraz $x = t$, $y = -t$. S využitím párnosti a $l(0) = 2l(t)r(t)$ dostávame

$$l(2t) = l(t)r(-t) + l(-t)r(t) = 2l(t)r(t) = l(0).$$

Keďže každé reálne číslo vieme zapísať v tvare $2t$, tak z toho vyplýva, že funkcia l je konštantná a $r(x) = l(0)/2l(0) = 1/2$. Ľahko skúškou overíme, že dvojica funkcií $l(x) = c$, $r(x) = 1/2$ vyhovuje pre ľubovoľnú nenulovú konštantu c.

b) Analogicky ako v časti a) dosadíme $x = y$. Teraz však kvôli $l(0) = 0$ máme $l(x)r(x) = 0$ pre všetky reálne čísla x. Keďže l je párna máme aj $l(-x)r(x) = 0$. Využitím tohto vzťahu pre t a $-t$ po dosadení $x = t$, $y = -t$ dostávame

$$l(t) = l(t)r(-t) + l(-t)r(t) = 0 + 0 = 0.$$

Funkcia l je preto konštantná 0. Vidíme, že po dosadení dostávame $0 = 0$, preto vyhovujú všetky dvojice, kde $l(x) = 0$ a r je ľubovoľná.

Komentár

Z riešení, ktoré nám prišli, bolo správnych veľmi málo, napriek tomu, že samotné riešenie až také zložité nie je. Problémom bolo, že ste často používali nekorektné úvahy. Najtypickejšou chybou bolo, že zo vzťahu $l(x)r(x) = 0$ ste vyvodzovali, že buď l alebo r je konštantná 0. To ale nemusí platiť. Platí len to, že v každom reálnom čísle je l alebo r nulová. Môže sa stať, že napríklad l bude nulová vo všetkých záporných a r vo všetkých kladných číslach.

Autori vzorových riešení: Erik Berta, Viktória Brezinová, Martin Albert Gbúr, Matej Hanus, Patrik Paľovčík, Róbert Sabovčík, Timea Szöllősová

Konečné poradie zimného semestra 45. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Lucia Chladná	Z9	GAMČABA	54	9	9	9	-	9	8	0	107
2.	Zdeněk Pezlar	S3	GJaroBR	50	-	9	9	-	9	5	0	82
3.	Martin Kopčány	S2	GJChaBR	36	9	9	5	8	6	2	0	78
4.	Veronika Chovancová	S2	PiarGTN	42	9	9	-	-	9	3	0	72
5. - 6.	Lenka Hake	S4	GAlejKE	53	9	9	-	-	-	-	0	71
	Martin Andričík	S4	GPoštKE	35	9	5	8	-	9	5	0	71
7.	Adam Džavoronok	S2	GPoštKE	36	9	8	-	-	9	6	0	68
8.	Michaela Rusnáková	S4	GAlejKE	26	9	9	1	9	9	-	0	63
9.	Timea Jakubócyová	S4	BGMHSuč	27	9	9	4	3	6	-	0	58
10.	Jakub Farbula	S4	GAlejKE	26	9	9	-	3	9	-	0	56
11.	Alex Gašparíková	S4	GAMČABA	11	9	8	9	-	9	9	0	55
12.	Václav Janáček	S4	GJaroBR	54	-	-	-	-	-	-	1	54
13.	Erik Novák	S3	GPoštKE	33	9	7	4	-	-	-	0	53
14. - 15.	Karin Eštoková	S2	GMRŠKE	37	-	-	9	-	6	-	0	52
	David Belobrad	S4	GAMČABA	18	9	7	4	2	9	3	0	52
16.	Michal Vorobel	S4	GJARMPO	21	9	9	-	-	9	3	0	51
17. - 18.	Martin Kliment	S3	GPoštKE	25	9	-	9	-	7	-	0	50
	Barbora Baltovičová	S1	GAlejKE	26	9	1	2	-	-	3	0	50
19. - 20.	Bianka Gurská	S1	GPoštKE	21	6	-	4	-	9	-	-1	49
	Oskar Hritz	S2	GPoštKE	20	9	9	-	-	9	2	0	49
21.	Sara Gašparová	S2	GAMČABA	18	9	9	3	-	7	1	0	48
22. - 23.	Martin Šmilňák	S1	GAlejKE	27	9	-	-	-	-	-	-1	45
	Lujza Milotová	S4	GPoštKE	18	9	9	-	-	9	-	0	45
24.	Adela Horváthová	S1	GPoštKE	12	8	-	5	-	9	-	-4	43
25.	Peter Kochelka	S3	GJGTBB	23	9	1	-	-	9	-	0	42
26.	Ján Richnavský	S4	GPoštKE	27	5	-	-	-	9	-	0	41
27.	Štefan Vašak	S2	GPoštKE	12	9	-	9	-	8	-	-2	38
28. - 29.	Csaba Daniel Farkaš	S3	SBGČesBA	37	-	-	-	-	-	-	0	37
	Natália Čigašová	S2	GPoštKE	16	9	9	3	-	0	-	0	37
30.	Ľubomír Vargovčík	S2	GPoštKE	11	6	3	4	-	9	-	-1	33
31. - 32.	Viliam Geffert	S2	GPoštKE	13	7	-	3	-	9	-	0	32
	Terézia Stanová	S1	EGJAKKE	11	3	0	0	-	9	-	-1	32
33.	Alex Blandón	S4	GPoštKE	11	9	-	5	-	6	-	-3	31
34. - 35.	Branislav Ječim	S1	GŠkolSN	12	-	-	-	-	9	-	0	30
	Alžbeta Klimentová	S1	GPoštKE	0	8	-	4	-	9	-	0	30
36.	Jakub Kulka	S2	GMRŠKE	11	9	-	9	-	-	-	0	29
37.	Anežka Kasalová	S2	MalGym	19	-	-	9	-	0	-	0	28
38.	Matúš Masrna	S3	GPoštKE	18	9	-	-	-	-	-	0	27
39.	Michal Židzik	S2	Gagls	0	9	8	9	-	-	-	0	26
40.	Samuel Vaško	S2	GJHN3BA	13	9	-	3	-	-	-	0	25
41.	Jakub Kliment	S4	GJGTBB	0	-	9	4	-	9	-	0	22
42.	Erik Jochman	S1	GAlejKE	21	-	-	-	-	-	-	0	21
43.	Dávid Kepič	S1	GAlejKE	20	0	0	-	-	-	0	0	20
44.	Jakub Mičko	S3	GPoštKE	16	-	-	-	-	-	-	0	16
45.	Vladimír Sklenár	S1	GTVanSL	13	0	-	0	-	0	-	0	13
46. - 47.	Viktor Imrišek	S2	GAMČABA	12	-	-	-	-	-	-	0	12
	Miriam Horváthová	S2	GŠtúrMI	12	-	-	-	-	-	-	-2	12
48.	Radoslav Jochman	S3	GAlejKE	11	-	-	-	-	-	-	0	11
49.	Adriana Schmotzerová	S4	GPoštKE	6	1	3	-	-	-	-	0	10
50. - 51.	Adam Garafa	S3	GPoštKE	9	-	-	-	-	-	-	0	9
	Paulína Dujavová	S3	GJARMPO	9	-	-	-	-	-	-	0	9
52.	Klára Hricová	S4	GPoštKE	7	-	-	-	-	-	-	0	7
53.	Gabriela Genčiová	S4	GPoštKE	1	5	-	-	-	-	-	0	6
54.	Ján Brajerčík	S1	GJARMPO	2	-	-	-	-	-	-	0	2

Názov: Strom – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • December 2020 • Zimný semester 45. ročníka (2020/2021)
Web: seminar.strom.sk
E-mail: strom@strom.sk
Riešenia: Prijímame poštou, na webe a v prípade poruchy stránky na riesenia.strom@strom.sk

Vydáva: Združenie Strom, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: zdruzenie.strom.sk
E-mail: info@strom.sk

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk