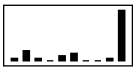
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj!

Je tu ďalší časopis STROMu, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najlepších z vás. Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústredenia v obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi. Ak sa Ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s Tebou uvidíme!

STROMáci

1. Opravovali: **Lujza Milotová a Maťo Gbúr**
Počet riešení: 32



Žanetka má dve spravodlivé hracie kocky (všetky čísla na nich padajú s rovnakou pravdepodobnosťou). Kristín má dve špeciálne hracie kocky, ktoré nie sú spravodlivé, ale sú totožné (napríklad, ak na jednej padá šestka s pravdepodobnosťou 1/2, tak aj na druhej). Zistite, ktorá z nich má vyššiu šancu hodiť dve rovnaké čísla.

Riešenie

Pravdepodobnosť, že Žanetka hodí nejaké konkrétne číslo je $\frac{1}{6}$, keďže má spravodlivú kocku. Pravdepodobnosť, že hodí to číslo dvakrát po sebe je teda $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$. Keďže máme na kocke 6 rôznych čísel, pravdepodobnosť hodenia dvoch rovnakých čísel po sebe bude $6 \cdot (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{6}$.

Pre kocky patriace Kristín označme postupne pre čísla 1 až 6 ich pravdepodobnosti padnutia ako $\frac{1}{6} + a, \frac{1}{6} + b, \frac{1}{6} + c, \frac{1}{6} + d, \frac{1}{6} + e, \frac{1}{6} + f$, pričom a až f sú čísla z intervalu $< -\frac{1}{6}, \frac{5}{6} >$, pretože číslo padne s pravdepodobnosťou aspoň 0 a najviac 1. Ďalej súčet čísel a až f musí byť rovný 0, pretože súčet pravdepodobností padnutia jednotlivých čísel musí byť rovný 1. Pravdepodobnosť hodenia dvoch rovnakých čísel potom bude:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{6}+a\right)^2+\left(\frac{1}{6}+b\right)^2+\left(\frac{1}{6}+c\right)^2+\left(\frac{1}{6}+d\right)^2+\left(\frac{1}{6}+e\right)^2+\left(\frac{1}{6}+f\right)^2 \\
&=\left(\frac{1}{6}\right)^2+2\cdot\frac{1}{6}\cdot a+a^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+2\cdot\frac{1}{6}\cdot b+b^2+\cdots+\left(\frac{1}{6}\right)^2+2\cdot\frac{1}{6}\cdot f+f^2 \\
&=6\cdot\frac{1}{36}+\frac{a+b+c+d+e+f}{3}+a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \\
&=\frac{1}{6}+a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2
\end{aligned}$$

Druhá mocnina je vždy nezáporné číslo, čiže bude platiť: $\frac{1}{6} + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \geq \frac{1}{6}$. Rovnosť nastane práve vtedy, ak všetky $a = b = c = d = e = f = 0$, no to by znamenalo, že by mala Kristín spravodlivú kocku. Nakoľko je kocka Kristín nespravodlivá, je táto nerovnosť ostrá (teda $\frac{1}{6} + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 > \frac{1}{6}$). Kristín má preto väčšiu šancu hodiť dve rovnaké čísla ako Žanetka.

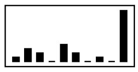
Komentár

Drvivá väčšina z vás túto úlohu vyriešila bez väčších problémov. Žiadaná nerovnosť sa dala dokázať aj o niečo elegantnejšie, pomocou nerovnosti medzi kvadratickým a aritmetickým priemerom pravdepodobností hodenia jednotlivých čísel na kocke, čo sme k nášmu potešeniu našli aj vo viacerých vašich riešeniach.

Bohužiaľ, niektorí dokazovali nerovnosť len pre zmenu pravdepodobností hodu dvoch čísel na kocke (pričom zvyšné 4 čísla mali pravdepodobnosť $\frac{1}{6}$), poprípade riešili úlohu len pre nejakú konkrétnu zmenu pravdepodobností. No poznamenať, že sa tento postup dá zovšeobecniť pre viac čísel nestačí, treba to aj dokázať.

2. Opravovali: **Viki Brezinová a Martin Masrna**

Počet riešení: 25



Mihál a Martin hrajú hru na štvorcovej mriežke 6×6. Vo svojom ťahu každý hráč zapíše do ľubovoľnej prázdnej bunky ľubovoľné racionálne číslo, ktoré sa ešte nenachádza nikde v mriežke. Začína Mihál, potom sa pravidelne striedajú. Keď budú vyplnené všetky políčka mriežky, v každom riadku sa zafarbí políčko s najväčším číslom. Mihál vyhrá, ak vie spojiť prvý a posledný rad čiarou prechádzajúcou len po zafarbených políčkach (čiara môže prechádzať aj rohom, ktorým susedia dve zafarbené políčka). Martin vyhrá, ak mu v tom zabráni. Kto má v tejto hre víťaznú stratégiu, a akú?

Riešenie

Do tabuľky môžeme napísať ľubovoľné racionálne číslo, ktoré sa v nej ešte nenachádza. Preto vieme vždy do prázdneho políčka dopísať číslo tak, aby bolo zatiaľ najväčšie v danom riadku (napr. pričítame 1 k najväčšiemu číslu v tabuľke). Takisto, do neprázdneho riadku vieme zapísať číslo, ktoré bude menšie ako niektoré iné číslo v danom riadku (napr. odčítame 1 od najmenšieho čísla v tabuľke).

Ukážeme si vyhrávajúcu stratégiu pre Martina. Popárujme políčka v prvých dvoch riadkoch tabuľky takto (políčka označené rovnakým písmenom tvoria pár):

A	B	C	D	E	F
D	E	F	A	B	C

Martin sa vo svojom ťahu vždy rozhodne podľa predchádzajúceho Mihálovho ťahu. Môžu nastať tri situácie:

1. Mihál napísal číslo do niektorého z posledných štyroch riadkov. Potom Martin napíše ľubovoľné číslo na ľubovoľné voľné políčko v tom istom riadku. Toto vie vždy urobiť, keďže v každom riadku je párny počet políčok.
2. Mihál napísal číslo do niektorého z prvých dvoch riadkov a číslo, čo napísal je aktuálne najväčšie v danom riadku. Potom Martin zapíše číslo na políčko označené tým istým písmenom tak, aby bolo tiež aktuálne najväčšie vo svojom riadku.
3. Mihál napísal číslo do niektorého z prvých dvoch riadkov a číslo, čo napísal nie je najväčšie v danom riadku. Potom Martin zapíše číslo na políčko označené tým istým písmenom tak, aby tiež nebolo najväčšie vo svojom riadku.

Keď bude tabuľka vyplnená, tak sa v prvých dvoch riadkoch zafarbia políčka s rovnakým písmenom, lebo Martin vždy dopisoval čísla tak, aby po jeho ťahu bolo aktuálne najväčšie číslo v oboch riadkoch na políčkach s rovnakým písmenom. Vidíme, že žiadne dve políčka s rovnakým písmenom nesusedia rohom ani stranou, takže Mihál nevie spojiť prvý a druhý rad čiarou prechádzajúcou len cez zafarbené políčka. Potom už vôbec nezáleží na tom, ktoré políčka sú zafarbené vo zvyšných riadkoch a Martin vyhral.

Komentár

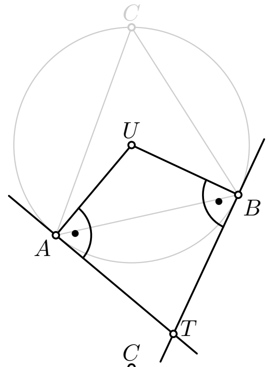
Väčšina z vás úlohu zvládla vyriešiť pomocou rozdelenia políčok do dvojíc, či už v rámci jedného riadku, alebo dvoch susedných riadkov ako vo vzorovom riešení.

Viacerým sa ale stalo to, že vaša stratégia fungovala iba pre konkrétnu podmnožinu všetkých hier - napríklad iba vtedy, ak hráči vypĺňajú políčka po riadkoch, teda najprv vyplnia celý jeden riadok, a až potom začnú vypĺňať ďalší. Toto však vôbec nemusí platiť. Víťazná stratégia musí fungovať bez ohľadu na to, či náš súper spolupracuje alebo nie.

Na záver by sme ešte radi podotkli, aby ste si dali záležať a naozaj podrobne rozpísali vaše myšlienky. Ak si opravovateľ musí domýšľať, čo ste sa snažili povedať, zvyčajne tým zbytočne prídete o pár bodov.

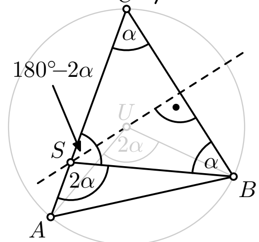
3. Opravovali: **Kubo Genči a Jano Richnavský**
Počet riešení: 25

Nech ABC je trojuholník s $|AC| > |AB|$ a U je stred kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Dotyčnice ku kružnici opísanej tomuto trojuholníku v bodoch A a B sa pretínajú v bode T. Os strany BC pretína stranu AC v bode S. Ukážte, že body A, B, S, T a U ležia na kružnici, a že priamka ST je rovnobežná s priamkou BC.



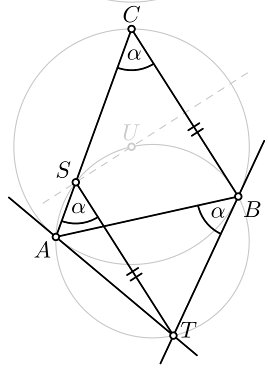
Riešenie

Dotyčnica ku kružnici je v bode dotyku kolmá na polomer kružnice, preto $|\sphericalangle UAT| = 90°$ a $|\sphericalangle UBT| = 90°$. V štvoruholníku $ATBU$ teda platí, že súčet veľkostí protiľahlých uhlov je 180°, čo znamená, že ide o tetivový štvoruholník. Z toho vyplýva, že body A, T, B a U ležia na jednej kružnici, označme ju k.



Bod S leží na osi úsečky BC, preto $|SB| = |SC|$. Z toho vyplýva, že trojuholník SBC je rovnoramenný so základňou BC. Označme uhol SCB ako α. Potom z rovnoramennosti dostávame $|\sphericalangle SCB| = |\sphericalangle SBC| = \alpha$. Vieme, že súčet uhlov v trojuholníku je 180°, preto $|\sphericalangle CSB| = 180° - 2\alpha$. Keďže bod S leží na AC, tak $|\sphericalangle ASB| = 180° - |\sphericalangle CSB| = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$.

Uhol ACB je obvodovým uhlom nad tetivou AB v kružnici opísanej trojuholníku ABC. Príslušným stredovým uhlom je uhol AUB, preto $|\sphericalangle AUB| = 2|\sphericalangle ACB| = 2\alpha$. Všimnime si, že $|\sphericalangle AUB| = |\sphericalangle ASB| = 2\alpha$. Vieme, že uhol AUB je obvodovým uhlom nad tetivou AB v kružnici k. To znamená, že aj uhol ASB je obvodový nad tetivou AB v kružnici k, kvôli čomu platí, že bod S leží na kružnici k. Tým sme dokázali, že body A, B, S, T a U ležia na jednej kružnici bez ohľadu na konkrétne veľkosti uhlov trojuholníka ABC.



Zostáva nám dokázať požadovanú rovnobežnosť. Uhol ABT je úsekovým uhlom k obvodovému uhlu ACB v kružnici opísanej trojuholníku ABC, preto $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABT| = \alpha$ (Pozn.: definíciu úsekového uhla si viete ľahko dohľadať, zároveň je možné túto rovnosť ukázať aj prostredníctvom uhla ABU, ktorého veľkosť je $(180-2\alpha)/2 = 90-\alpha$ (z rovnoramenného trojuholníka ABU). Veľkosť uhla ABT je potom $90-(90-\alpha) = \alpha$). Uhly ABT a AST sú obvodovými nad tetivou AT v kružnici k, a teda majú rovnakú veľkosť ($|\sphericalangle ABT| = |\sphericalangle AST| = \alpha$). Keďže uhly AST a ACB majú rovnakú veľkosť, tak ide o dvojicu súhlasných uhlov, čo dokazuje, že ST je rovnobežné s BC.

Komentár

Na tejto na prvý pohľad priamočiarej úlohe zakopla väčšina riešiteľov – postupy vašich riešení boli často správne, no nezahŕňali všetky možné prípady. Konkrétnejšie bod U môže ležať mimo trojuholníka ABC v prípade, ak je tupouhlý; môže splynúť s bodom S, ak je pravouhlý s pravým uhlom pri B; môže ležať v strede úsečky BC, ak je pravouhlý s pravým uhlom pri A.

Ak ste v riešení využili uhol, ktorého rameno bolo určené napríklad dvojicou bodov S a U, nepokrýva takéto riešenie všetky možné polohy bodu U voči trojuholníku ABC. Takéto uhly ste často využívali aj pri dokazovaní toho, že S leží na kružnici k, ale aj na dôkaz rovnobežnosti dvoch priamok. Tieto riešenia pochopiteľne nemohli byť ohodnotené plným počtom bodov.

Vo vzorovom riešení uvádzame postup, ktorý funguje pre akýkoľvek trojuholník ABC bez ohľadu na veľkosti jeho vnútorných uhlov (Pozn.: v prípade, že $S = U$, pochopiteľne netreba dokazovať, že S leží na kružnici k, keďže sme to dokázali už pre bod U, avšak samotný dôkaz pre bod S funguje aj v tomto prípade).

Špeciálne prípady v tejto úlohe boli veľmi nenápadné, preto sme si istí, že si na ne budete v budúcnosti dávať väčší pozor ;). Ak existujú nejaké špeciálne prípady, musíte ich buď pokryť všetky vo vašom všeobecnom riešení, alebo každý z nich ošetriť zvlášť.

4. Opravovali: **Timea Szöllősová a Michal Masrna**
Počet riešení: 12

Dokážte, že neexistuje prvočíslo p, pre ktoré by existoval polynóm $px^2 + ax + b$ v premennej x s celočíselnými koeficientami a, b a dvoma rôznymi racionálnymi koreňmi v intervale $(0, 1)$.

Riešenie

Keďže máme kvadratický polynóm a hľadáme jeho korene, tak vlastne hľadáme riešenia kvadratickej rovnice, kde na jednej strane je náš polynóm a druhá strana je 0. To znamená, že obe strany môžeme predeliť p a dostávame tvar $x^2 + \frac{a}{p}x + \frac{b}{p} = 0$.

Predpokladajme spor so zadaním a označme si korene ako zlomky v základnom tvare $\frac{x_1}{x_2}$ a $\frac{y_1}{y_2}$, pričom aby spĺňali aj druhú podmienku, musí platiť $x_1 < x_2$ a $y_1 < y_2$ kde $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \in \mathbb{N}$.

Zapíšme si Viètove vzťahy. Začnime vzťahom pre konštantný člen $\frac{x_1 y_1}{x_2 y_2} = \frac{b}{p}$. Keďže čitatele oboch koreňov sú menšie ako ich menovatele, tak platí aj $b < p$. Keďže p je prvočíslo, zlomok $\frac{b}{p}$ je v základnom tvare. To znamená, že menovateľ na ľavej strane musí byť deliteľný p. Všimnime si, že iba jedno z $x_2,\ y_2$ môže byť deliteľné p. Ak by boli obe, musel by byť aj čitateľ deliteľný p (aby sme po úprave na základný tvar dostali len p v menovateli), čo je v spore s tým, že oba korene sú zlomky v základnom tvare.

Bez ujmy na všeobecnosti nech $x_2 = kp$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$. Druhý Viètov vzťah si preto vieme upraviť

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{y_2} = -\frac{a}{p}$$

$$\frac{x_1}{kp} + \frac{y_1}{y_2} = -\frac{a}{p}$$

$$\frac{x_1 y_2 + kpy_1}{kpy_2} = -\frac{a}{p}$$

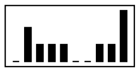
$$\frac{x_1 y_2 + kpy_1}{ky_2} = -a.$$

Aby bol tento zlomok celé číslo $(-a)$, musí ky_2 deliť celého čitateľa. Z toho plynie, že aj k musí deliť celého čitateľa, teda musí deliť $x_1 y_2$, pretože už delí kpy_1. Keďže aj $y_2 \mid x_1 y_2$, tak $ky_2 \mid x_1 y_2$. Rovnakou úvahou $ky_2 \mid kpy_1$, čiže $y_2 \mid py_1$. Vieme, že $y_2 \nmid p$ teda $y_2 \mid y_1$, čo je požadovaný spor, keďže sme predpokladali $y_1 < y_2$.

Komentár

Každé riešenie tejto úlohy bolo unikátne - niektorí ste ju riešili pomocou Viètových vzťahov, niektorí pomocou vzorca s diskriminantom a niektorí dokonca ich kombináciou, či niečím úplne odlišným. Teší nás, že každý si našiel cestu, ktorá mu vyhovovala najviac a preto veríme, že sa vám páčila úloha aspoň tak, ako nám vaše riešenia :)

5. Opravovali: **Žanetka Semanišinová a Kristín Mišlanová**
Počet riešení: 10



Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x a y platí $f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ je najväčšie celé číslo menšie alebo rovné x.

Riešenie

Daná rovnosť musí platiť pre všetky reálne čísla x a y, takže sa môžeme pozrieť, čo dostaneme z niektorých konkrétnych základných dosadení. Pre dvojicu $(x, y) = (1, 1)$ dostávame:

$$f(1) = f(1)\lfloor f(1) \rfloor$$

Máme dve možnosti, buď je $f(1) = 0$, alebo vieme rovnicu vydeliť $f(1)$ a dostaneme $\lfloor f(1) \rfloor = 1$. Tieto možnosti postupne rozoberieme:

1. Platí $f(1) = 0$. Teraz využijeme túto vlastnosť a pozrieme sa na dosadenie $(x, y) = (1, y)$:

$$\begin{aligned} f(\lfloor 1 \rfloor y) &= f(1)\lfloor f(y) \rfloor \\ f(y) &= 0 \end{aligned}$$

   Ukázali sme, že v tomto prípade pre všetky reálne čísla y platí $f(y) = 0$, čiže ide o konštantnú nulovú funkciu. Po dosadení do zadania zistíme, že táto funkcia vyhovuje a je jedným z hľadaných riešení.

2. Platí $\lfloor f(1) \rfloor = 1$. Teraz sa pozrieme na dosadenie $(x, y) = (0, 0)$:

$$f(0) = f(0)\lfloor f(0) \rfloor$$

   Opäť si všimneme, že máme dve možnosti. Buď $f(0) = 0$ alebo $\lfloor f(0) \rfloor = 1$.

   (a) Platí $\lfloor f(0) \rfloor = 1$. Dosaďme $(x, y) = (x, 0)$:

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x)\lfloor f(0) \rfloor \\ f(0) &= f(x) \end{aligned}$$

   Keďže $f(0)$ je konkrétne číslo, tak môžeme písať $f(x) = c$ pre nejakú konštantu c. Z podmienky $\lfloor f(0) \rfloor = 1$ navyše dostávame, že c nutne leží v intervale $[1, 2)$. Po dosadení do pôvodného zadania dostaneme $c = c\lfloor c \rfloor$, čo pre $c \in [1, 2)$ platí.

   (b) Platí $f(0) = 0$. Teraz dosadíme $(x, y) = (x, 1)$ a použijeme $\lfloor f(1) \rfloor = 1$:

$$\begin{aligned} f(\lfloor x \rfloor) &= f(x)\lfloor f(1) \rfloor \\ f(\lfloor x \rfloor) &= f(x) \end{aligned}$$

   Posledné dosadenie, ktoré budeme potrebovať je $(x, y) = (2, 1/2)$:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(2)\lfloor f(1/2) \rfloor \\ f(1) &= f(2)\lfloor f(0) \rfloor \\ f(1) &= 0 \end{aligned}$$

   Pri úpravách sme využili vzťah $f(\lfloor x \rfloor) = f(x)$, ktorý sme už ukázali. Konkrétne $f(1/2) = f(\lfloor 1/2 \rfloor) = f(0) = 0$. Dospeli sme však k tomu, že $f(1) = 0$. To je v spore s tým, že $\lfloor f(1) \rfloor = 1$, ako sme predpokladali.

Ukázali sme, že jediná vyhovujúca funkcia je konštantná funkcia $f(x) = c$ pre $c = 0$ a $c \in [1, 2)$.

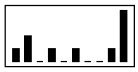
Komentár

V tejto funkcionálke stačilo zopár dobre zvolených dosadení a opatrnosť pri rozoberaní prípadov a bolo skoro hotovo, o čom svedčí aj množstvo riešiteľov, ktorým sa podarilo dospieť k výsledku a aj jeho čiastočnému odôvodneniu. Preto všetkým doporučujeme, nech to nabudúce s funkcionálkou skúsia, pravdepodobne to nejaké body prinesie.

Pri riešení nezabúdajte na to, že tento druh úlohy sa nedá vyriešiť tak, že prejdete nejaké bežné druhy funkcií, ktoré sa preberajú v škole a otestujete, ktoré z nich vyhovujú. Týmto spôsobom sa dá síce niekedy uhádnuť riešenie, ale na plný počet bodov musíte ukázať, že nevyhovuje žiadna iná funkcia (teda ani nejaká čudná, napr. taká, ktorá má na celých číslach hodnotu 42 a na zvyšných 47).

6. Opravovali: **Dano Onduš a Peťo Kovács**

Počet riešení: 10



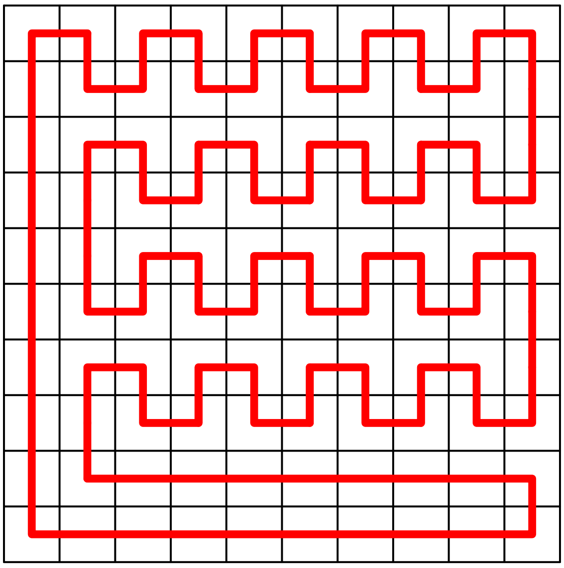
Po štvorcovej tabuľke $(4k+2)\times(4k+2)$ sa pohybuje prefíkaný leňochod len medzi štvorčekmi susediacimi hranou. Leňochod spraví nasledovnú prechádzku: začne v rohovom štvorčeku tabuľky, prejde každým štvorčekom práve raz a skončí na mieste, kde začal. V závislosti od k určte najväčšie prirodzené číslo n také, že v tabuľke musí existovať riadok alebo stĺpec, do ktorého leňochod vstúpil aspoň n-krát (vstúpiť do riadku/stĺpca znamená presunúť sa z iného riadku/stĺpca do tohto riadku/stĺpca).

Riešenie

Keďže na každé políčko stúpi leňochod práve raz, tak počet pohybov je rovný $(4k+2)^2$. Zároveň pri každom pohybe vstúpi do jedného riadka alebo stĺpca. Keďže riadkov a stĺpcov je dokopy $2\cdot(4k+2)$, tak priemerný počet vstúpení je $2k+1$. Z toho vyplýva, že $n \geq 2k+1$. Ak by leňochod do každého riadka aj stĺpca vstúpil nanajvýš $2k$-krát, tak by dokopy mohol urobiť len $2k\cdot 2\cdot(4k+2)$ krokov, čo je menej, ako urobil.

Predpokladajme, že leňochod začína vľavo hore a $n = 2k+1$. Na prejdenie všetkých políčok, musí z každého riadku vyjsť toľkokrát, koľkokrát tam vošiel. To znamená, že do každého riadka vstúpil a zároveň z každého vystúpil práve $(2k+1)$-krát. Špeciálne aj do prvého a druhého zhora. Do prvého riadka však vie vstúpiť len z druhého a vystúpiť z neho vie rovnako len do druhého. Preto do druhého riadka vstúpil $(2k+1)$-krát z prvého, a teda do neho už nemôže vojsť zo žiadneho iného riadka. Z toho však vyplýva, že z druhého riadka nemôže nikdy vojsť do tretieho, lebo by sa už nemohol vrátiť. To je spor s tým, že navštívi všetky políčka.

Z toho plynie, že $n \geq 2k+2$. Teraz ukážeme konštrukciu cesty, kde do každého riadka aj stĺpca vojdeme nanajvýš $(2k+2)$-krát, z čoho získame $n \leq 2k+2$. Na obrázku ju môžeme vidieť pre $k=2$, pre väčšie k budeme mať k „zvlnených 4-riadkov“, ktoré budú dlhšie. To, že konštrukcia funguje aj pre väčšie k, ukážeme indukciou.



Máme indukčný predpoklad pre $k=2$ a ľahko vieme overiť, že konštrukcia bude vyhovovať aj pre $k=1$. Preto stačí urobiť krok z k na $k+1$, kde potrebujeme ukázať, že počet vstúpení do každého riadka aj stĺpca sa zvýši najviac o dva. Urobíme ho v dvoch fázach.

V prvej fáze predĺžme každý riadok o 4, pričom zvlnené opäť zvlníme a spodné dva ostanú rovné. Zjavne takto nezmeníme počet vstúpení do žiadneho stĺpca, keďže novo pridané stĺpce sa budú zhodovať s už existujúcimi. Zároveň do každého riadka vstúpime v pridanej zvlnenej časti dvakrát, lebo sa pridajú 4 horizontálne čiary, dve vstupujúce a dve vystupujúce.

Teraz pridajme jeden dlhý zvlnený 4-riadok. Ten bude len kópiou nejakého existujúceho, takže žiaden z jeho riadkov neporuší počet vstupov. Zároveň do každého stĺpca vstúpime v tomto 4-riadku nanajvýš dvakrát – raz cestou k pravému kraju tabuľky a raz cestou naspäť, čím je indukčný krok dokončený.

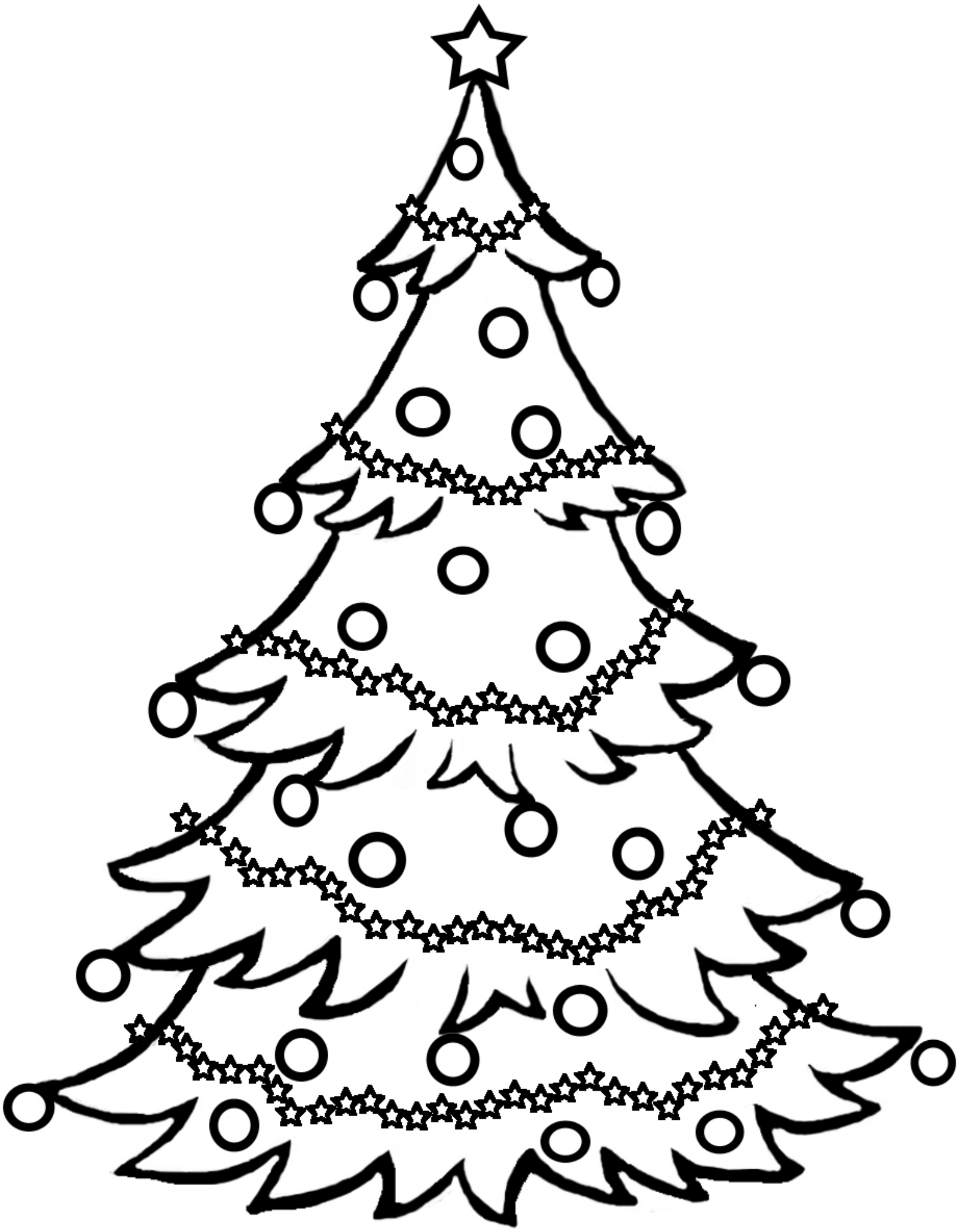
Spojením nerovností dostávame, že najväčšie takéto n je $2k+2$.

Komentár

V tejto úlohe bolo potrebné ukázať, že pre pre dané n existuje cesta, kde do žiadneho riadka ani stĺpca nevstúpime viac ako n-krát, a zároveň, že pre žiadne menšie n takáto cesta neexistuje. Väčšina z vás sa dopracovala k správnemu výsledku, niektorí ste však zabudli zdôvodniť, prečo menšie n nevyhovujú. Prípadne ste iba povedali, že vašu konštrukciu nie je možné zlepšiť, čo však nie je dôkaz.

Konečné poradie zimného semestra 46. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Lucia Chladná	S1	GAMČABA	54	9	-	9	9	9	9	0	108
2.	Martin Kopčány	S3	GJChaBR	50	9	9	8	9	9	8	0	102
3.	Adam Džavoronok	S3	GPoštKE	54	9	-	7	9	9	9	0	97
4.	Michal Pecho	S4	SDubn	45	9	9	9	9	8	5	0	94
5.	Veronika Chovancová	S3	PiarGTN	47	9	1	7	2	7	9	0	82
6.	Michal Iľkovič	S1	GSMTŠPO	34	8	9	8	-	-	9	0	77
7. - 8.	Ondrej Králik	S1	GAlejKE	32	5	4	8	9	1	-	0	67
	Karin Eštoková	S3	GMRŠKE	39	9	4	6	9	-	-	0	67
9.	Oskar Hritz	S3	GPoštKE	42	9	9	2	-	2	-	0	64
10. - 11.	Marian Rajnoha	S3	GAKBŠ	33	9	2	4	9	3	3	0	63
	Richard Vodička	S1	GAlejKE	36	9	-	-	9	-	-	0	63
12.	Katarína Farbulová	S1	GPoštKE	30	9	-	9	-	-	-	0	57
13.	Sara Gašparová	S3	GAMČABA	33	9	5	7	-	-	-	0	54
14. - 15.	Marek Horváth	S1	GKonšPO	29	5	9	-	-	-	-	0	48
	Maxima Anna Alžbeta Bednarčíková	S1	GAlejKE	27	9	-	6	-	-	-	0	48
16.	Erik Novák	S4	GPoštKE	28	9	9	-	-	-	-	0	46
17. - 18.	Martin Šmilňák	S2	GAlejKE	27	-	9	6	-	-	-	0	42
	Bianka Gurská	S2	GPoštKE	24	9	9	-	-	-	-	0	42
19.	Matúš Masrna	S4	GPoštKE	23	9	9	-	-	-	-	0	41
20.	Jakub Kulka	S3	GMRŠKE	21	9	-	4	-	4	-	0	38
21.	Veronika Vodičková	S1	GAlejKE	29	1	-	6	-	-	-	0	37
22.	Matúš Libák	Z9	GAlejKE	27	9	-	-	-	-	-	0	36
23.	Branislav Ječim	S2	GŠkolSN	17	9	9	-	-	-	-	0	35
24. - 26.	Adela Horváthová	S2	GPoštKE	15	9	9	-	-	-	-	0	33
	Natália Čigašová	S3	GPoštKE	33	-	-	-	-	-	-	0	33
	Martin Dudjak	S1	SMládPP	25	2	4	-	-	-	-	0	33
27.	Lukáš Lučanský	S4	gymtv	19	5	1	4	2	-	1	0	32
28.	Štefan Vašak	S3	GPoštKE	13	-	9	6	-	-	-	0	28
29.	Terézia Stanová	S2	EGJAKKE	15	1	7	4	-	-	-	0	27
30.	Ľubomír Vargovčík	S3	GPoštKE	20	-	-	6	-	-	-	0	26
31.	Oskar Cacara	Z9	ZKro4KE	17	4	2	-	-	-	-	0	25
32. - 34.	Miriam Halasová	S2	GSMTŠPO	20	-	-	4	0	-	-	0	24
	Martin Janček	S3	SMládPP	18	1	-	3	-	1	1	0	24
	Viera Glevitzká	S3	GVBNPD	0	9	-	6	9	-	-	0	24
35.	Viliam Geffert	S3	GPoštKE	14	-	-	5	-	-	-	0	19
36.	Filip Rásó	S2	SBGGalanta	18	-	-	-	-	-	-	0	18
37.	Paulína Dujavová	S4	GJARMPO	16	-	-	-	-	-	-	0	16
38.	Daniela Jurišinová	S2	GLStöBJ	14	-	-	-	-	-	-	0	14
39.	Richard Gerboc	S3	GPoštKE	12	-	-	-	-	-	-	0	12
40. - 43.	Tomáš Tall	S3	GSMTŠPO	9	-	-	-	-	-	-	0	9
	Oliver Seman	Z9	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	-	0	9
	Kristína Štefčáková	S2	GKonšPO	9	-	-	-	-	-	-	0	9
	Martin Kliment	S3	GPoštKE	0	4	5	-	-	-	-	0	9
44. - 45.	Viktória Nogová	S2	GLStöBJ	7	-	-	-	-	-	-	0	7
	Lukáš Hudák	S3	GLStöBJ	7	-	-	-	-	-	-	0	7
46. - 47.	Natália Poliačiková	S1	GPoštKE	4	-	-	-	-	-	-	0	4
	Peter Kochelka	S4	GJGTBB	0	-	4	-	-	-	-	0	4
48.	Monika Birošová	S2	GLStöBJ	3	-	-	-	-	-	-	0	3
49. - 50.	Ladislav Jakab	S2	soskn	0	0	1	0	-	-	0	0	1
	František Bublák	Z7	GABerSC	0	1	0	-	-	-	-	0	1



Názov: Strom – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • December 2021 • Zimný semester 46. ročníka (2021/2022)
Web: `seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`
Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese `riesenia.strom@strom.sk`.

Vydáva: Združenie Strom, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: `zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.