STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie STROMu, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame Tvoje ďalšie riešenia!

STROMáci

Ako bude!

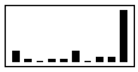
Tábor mladých matematikov

Už tradične aj toto leto budeme organizovať Tábor mladých matematikov, ktorý sa uskutoční na Chate Slaná Voda v termíne 8. až 15. augusta 2023.

Nevieš, čo je to Tábor mladých matematikov, skrátene TMM? Je to tábor, ktorý je určený pre súčasných šiestakov základných škôl až prvákov stredných škôl (a samozrejme tomu ekvivalentné ročníky viacročných gymnázií). Programom sa veľmi podobá na naše sústredenia, ktoré máte všetci tak radi, ale TMM je o 2 dni dlhšie, takže aj o 2 dni lepšie! Pozvánku s podrobnými informáciami a prihlasovací formulár nájdeš na `https://strom.sk/tmm/`. S prihlasovaním však dlho neotáľaj, kapacita tábora je obmedzená. Tešíme sa na Tvoju účasť!

1.

Opravovali: **Kristín Mišlanová a Ľuboš Vargovčík**
Počet riešení: 42 Najkrajšie riešenie: **Katka Farbulová**



Dokážte, že skupinu ľubovoľných $2n$ cifier, vieme rozdeliť na dve skupiny o veľkosti n tak, že rozdiel súčtov čísel v týchto skupinách bude nanajvýš 9.

Riešenie

Majme na začiatku v každej skupine iba jednu cifru ($n = 1$), najväčší rozdiel týchto skupín môže byť 9 v prípade, že v jednej skupine je 9 a v druhej 0.

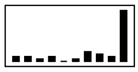
Teraz budeme po dvojiciach postupne pridávať do každej skupiny jednu cifru a ukážeme, že ak pred týmto pridaním bol rozdiel súčtov nanajvýš 9, tak bude aj po pridaní. Označme si S_1 a S_2 aktuálne súčty skupín a nech platí $S_1 \geq S_2$. Rozdiel týchto skupín bude $S_1 - S_2$. Ak by sme teraz zobrali dve nové cifry a a b, pričom $a \leq b$ a pridali by sme ich nasledujúcim spôsobom, tak rozdiel novovzniknutých skupín by bol $(S_1 + a) - (S_2 + b)$, čo sa dá prepísať na $(S_1 - S_2) + (a - b)$. Už vieme, že rozdiel $S_1 - S_2$ je nanajvýš 9 a najmenej 0. Rozdiel $a - b$ je nanajvýš 0 alebo najmenej -9. Takže výraz $(S_1 - S_2) + (a - b)$ si môžeme byť istí, že sa nikdy nevychýli z intervalu od -9 po 9 vrátane.

Komentár

Pri riešení ste vo väčšine prípadov najprv vysvetlili ako by ste čísla rozdeľovali do samotných skupín tak, aby bol rozdiel skupín nanajvýš 9, no veľakrát sa vám stalo, že ste zabudli dokázať prečo to funguje, čo bolo pointou riešenia. V mnohých prípadoch vám stačili aj dve vety na to, aby ste získali o 4 body viac. Nabudúce si na konci prejdite svoje riešenie a všímajte si, či je všetko vysvetlené.

2.

Opravovali: **Miriam „Mirka" Horváthová a Martin Masrna**
Počet riešení: 38 Najkrajšie riešenie: **Eva Krajčiová**



Určte všetky reálne čísla p také, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y platí nerovnosť:

$$\frac{x^3 + py^3}{x + y} \geq xy.$$

Riešenie

Ak má nerovnosť platiť pre každé kladné reálne x, y, tak musí platiť aj pre $x = y = 1$. Potom vieme, že:

$$\begin{aligned} \frac{1+p}{2} &\geq 1 \\ 1 + p &\geq 2 \\ p &\geq 1 \end{aligned}$$

Skúsme teraz ukázať, že pre každé $p \geq 1$ naša nerovnosť platí. Upravujme:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + py^3}{x + y} &\geq xy \\ \frac{x^3 + py^3}{x + y} - xy &\geq 0 \end{aligned}$$

Pozrime sa na čitateľ v zlomku $\frac{x^3+y^3}{x+y}$. Podľa známeho vzorca $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ si ho môžme upraviť a následne zlomok vykrátiť na $x^2 - xy + y^2$.

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + y^3}{x + y} + \frac{(p-1)y^3}{x + y} - xy &\geq 0 \\ (x^2 - xy + y^2) - xy + \frac{(p-1)y^3}{x + y} &\geq 0 \end{aligned}$$

Teraz môžeme upraviť $(x^2 - xy + y^2) - xy$ na $x^2 - 2xy + y^2$ a následne použiť vzorec $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$.

$$(x-y)^2 + \frac{(p-1)y^3}{x+y} \geq 0$$
$$(x+y)(x-y)^2 + (p-1)y^3 \geq 0$$

Pozrime sa teraz na jednotlivé členy ľavej strany:

- $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$, lebo x, y sú kladné reálne čísla (teda $x + y \geq 0$) a druhá mocnina je vždy nezáporná (teda $(x-y)^2 \geq 0$)
- $(p-1)y^3 \geq 0$, pretože y je kladné, teda aj y^3 je kladné a zároveň $p \geq 1$, takže $p - 1 \geq 0$

Dostávame súčet dvoch nezáporných čísel, ktorý bude tiež určite nezáporný, a teda ≥ 0.

Všetky úpravy boli ekvivalentné, keďže $x, y > 0$, preto nerovnosť zo zadania platí pre každé $p \geq 1$. Pre $p < 1$ neplatí, pretože potom nebude platiť pre $x = y = 1$.

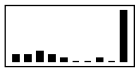
Komentár

Pri podobných úlohách treba vždy dokázať dve veci. Prvá je, že čísla, ktoré vyhovujú, vyhovujú pre všetky prípustné hodnoty x, y. Druhá je, že žiadne iné číslo nevyhovuje pre aspoň jednu hodnotu x, y. Veľká časť z vás to zvládla a úlohu vyriešila správne, kto zabudol na jednu z týchto vecí, tomu išli body dole.

Napokon zopár slov k riešeniam využívajúcim derivácie – pri používaní derivácií a iných nástrojov z matematickej analýzy buďte opatrní – veci väčšinou nie sú také jednoduché, ako si myslíte. Napríklad, ak chceme nájsť lokálne extrémy funkcie, nestačí zistiť, v akých bodoch sa derivácia rovná nule (skúste si to pre x^3). Dobre sa uistite, že ovládate teóriu, keď chcete používať tieto nástroje. Alebo úlohu vyriešte bez nich – nikdy do STROMu nedáme úlohu, na ktorej vyriešenie by ste potrebovali ovládať derivácie, integrály alebo iné vysokoškolské učivo.

3.

Opravovali: **Erik „Rici“ Novák a Štefan Vašak**
Počet riešení: 26 Najkrajšie riešenie: **Eva Krajčiová**



Nech M je najmenšia množina racionálnych čísel, ktorá má nasledovné vlastnosti:

- M obsahuje $\frac{1}{2}$.
- Ak M obsahuje $\frac{p}{q}$, kde p je celé číslo a q je kladné celé číslo, tak obsahuje aj $\frac{p}{p+q}$ a $\frac{q}{p+q}$.

Dokážte, že množina M obsahuje všetky racionálne čísla v intervale $(0, 1)$.

Riešenie

Jednou z vlastností racionálnych čísel je, že sa všetky dajú zapísať v tvare $\frac{a}{b}$, pričom a je z množiny celých čísel a b je z množiny kladných celých čísel. Pre racionálne čísla z intervalu $(0, 1)$ navyše platí $a < b$ a $a > 0$.

Na dokázanie využijeme dôkaz sporom. Povedzme, že existuje zlomok $\frac{a}{b}$ taký, že patrí do $(0, 1)$, no nepatrí do množiny M, pričom a, b sú kladné celé a $a < b$. Zo všetkých takýchto zlomkov, ktoré by teoreticky mohli existovať si navyše vezmime ten, ktorý má najmenšiu hodnotu v menovateli, teda b je minimálne možné. Za tohto predpokladu platí, že každý zlomok s menším menovateľom už do množiny M určite patrí.

Vyzbrojení touto vedomosťou sa pozrime na vzťah medzi číslami a a $b - a$:

1. $a < b - a$

   Pozrime sa lepšie na zlomok $\frac{a}{b-a}$. Keďže platí, že $a < b - a$, vieme, že tento zlomok patrí do intervalu $(0, 1)$. Zároveň si všimnime, že v menovateli máme $b - a$, čo je v Z^+ menšie ako b. Za predpokladu, že $\frac{a}{b}$ je zlomok s najmenším menovateľom, ktorý súčasne nepatrí do M, môžeme povedať, že zlomok $\frac{a}{b-a}$ do množiny M určite patrí. Zo zadania ďalej do M patrí aj $\frac{a}{a+b-a} = \frac{a}{b}$. Dostávame tak spor, pretože náš predpoklad bol, že tento zlomok do M nepatrí, no my sme zistili, že do M patrí.

2. $a = b - a$

   Z toho úpravou získame vzťah $b = 2a$. Náš zlomok je preto $\frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, čo do M zo zadania patrí. Opäť tak dostávame spor.

3. $a > b - a$

   Platí $b - a > 0$, pretože $b > a$. Zároveň platí $b - a < a$. Ak sa pozrieme na zlomok $\frac{b-a}{a}$, tak opäť môžeme usúdiť, že je z intervalu $(0, 1)$. Menovateľ je tentoraz a, čo je opäť menej ako b. Preto, ak je splnený náš predpoklad, tak tento zlomok určite patrí do M. V tomto prípade ale znova zo zadania patrí do M aj $\frac{a}{b-a+a}$, čo je opäť $\frac{a}{b}$. Tým znovu dostávame spor.

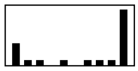
Úlohu sme teda dokázali sporom – ukázali sme, že jej negácia je nepravdivá.

Komentár

Pri riešení ste použili mnoho rôznych postupov. Táto diverzita nás teší a nenechajte sa odradiť, ak nezdieľate myšlienkový postup s tým, ktorý prezentujeme vo vzoráku! Jednu vec, ktorú by sme však radi zo vzoráku vyzdvihli, je extremálny princíp, teda to, že ak existujú racionálne čísla menšie ako 1 ktoré nie sú v M, tak nejaké z nich má najmenší menovateľ spomedzi nich a ďalej už uvažujeme iba toto číslo.
Táto napohľad jednoduchá úvaha nám pomáha na konci dôjsť k veľmi peknému sporu a rovnako by pomohla upratať vo všetkých tých riešeniach, ktoré ju nespravili a pokúšali sa rôznymi krkolomnými spôsobmi dokázať, že sa z nejakého zlomku ktorý nie je v M určite vieme dostať úpravami k $\frac{1}{2}$.

4.

Opravovali: **Michal Masrna, Oskar Hritz a Viliam Geffert**
Počet riešení: 12 Najkrajšie riešenie: **Marek Horváth**



Kladné celé číslo n má práve d deliteľov a zároveň sa medzi jeho deliteľmi nevyskytuje štvorec väčší než 1. Koľko najviac z týchto deliteľov (vzhľadom na n a d) môžeme vybrať tak, aby pre žiadne dva vybrané delitele a, b nebol $a^2 + ab - n$ nenulový štvorec?

Riešenie

Pri tomto riešení je potrebné si uvedomiť, že ak nejaké číslo n nemá „štvorcového“ deliteľa, tak všetky jeho prvočinitele nemôžu mať vyšší exponent ako jeden. Totiž, ak by to platilo pre nejaký provčiniteľ p, potom by $p^2 \mid n$, čo je v spore so zadaním. Z toho vyplýva, že ak máme v prvočíselnom rozklade k prvočiniteľov, tak $d = (k_1 + 1)(k_2 + 1)...(k_n + 1) = 2^k$.

Ďalej si určíme hornú hranicu počtu vybraných deliteľov. Môžeme si všimnúť, že ak vyberieme dva delitele a, b čísla n také, že $ab = n$, tak zadaný výraz $a^2 + ab - n$ sa nám po dosadení zmení na tvar $a^2 + n - n = a^2$. To je však spor so zadaním, lebo to je nenulový štvorec. Vieme, že n má párny počet deliteľov, preto môžeme jeho deliteľov rozdeliť do disjunktných dvojíc, ktorých súčin je n. Z každej takejto dvojice vieme vybrať najviac jedného deliteľa. Dokopy teda môžeme vybrať najviac $\frac{d}{2}$ deliteľov.

Pozrime sa na prípad $n = 1$, čiže $a = b = 1$. Tu dostávame $1^2 + 1 \cdot 1 - 1 = 1$. Číslo 1 je však nenulový štvorec, takže pre $n = 1$ môžeme vybrať 0 deliteľov.

Ostáva prípad, keď $n > 1$. Ukážme, že vždy vieme vybrať aspoň $\frac{d}{2}$ deliteľov. Všimnime si, že ak vyberieme všetky delitele čísla n, ktoré obsahujú niektorý z jeho prvočiniteľov p, tak ich bude práve $\frac{d}{2}$. Dôvodom je, že pre každý takýto deliteľ x existuje deliteľ $\frac{x}{p}$, ktorý p neobsahuje a naopak. Ostáva už len dokázať, že takýto výber deliteľov vyhovuje zadaniu. To dokážeme sporom. Predpokladajme, že existuje také a, b, pre ktoré by platilo:

$$a^2 + ab - n = m^2; m \in \mathbb{Z}^+$$

Vieme, že a, b aj n sú deliteľné p, takže ich môžeme zapísať v tvare pa_1, pb_1, pn_1, kde a_1, b_1, n_1 sú kladné celé čísla. Dosaďme a upravujme:

$$\begin{aligned} (pa_1)^2 + pa_1pb_1 - pn_1 &= m^2 \\ p(pa_1^2 + pa_1b_1 - n_1) &= m^2 \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že $p \mid m^2$. Keďže p je prvočíslo, tak $p \mid m$ a $p^2 \mid m^2$:

$$\begin{aligned} &p^2 \mid m^2 \\ &p^2 \mid p(pa_1^2 + pa_1b_1 - n_1) \\ &\ p \mid pa_1^2 + pa_1b_1 - n_1 \\ &\ p \mid n_1 \end{aligned}$$

Vieme, že $p \mid n_1$, preto musí platiť, že $p^2 \mid pn_1$, resp. $p^2 \mid n$. To je však spor s predpokladom, že n nemá žiadneho „štvorcového“ deliteľa.

Dokázali sme, že pre $n > 1$ môžeme vždy vybrať $\frac{d}{2}$ deliteľov čísla n tak, aby platilo, že $a^2 + ab - n$ nie je nenulový štvorec.

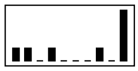
Komentár

V úlohách, ako je táto, kde sa nás pýtajú, koľko najviac (prípadne koľko najmenej) niečoho môže byť, často pomáha si riešenie rozdeliť na dve časti. V jednej časti ukážete nejakú hornú hranicu pre hľadaný počet a v tej druhej vám už stačí nájsť ľubovoľnú konštrukciu pre tento počet a dokázať o nej, že spĺňa podmienky zadania. Tieto časti sa často dokazujú odlišným spôsobom, preto môže byť jednoduchšie a prehľadnejšie ich vo vašom riešení jasne oddeliť (tak ako sme to spravili aj vo vzorovom riešení), aby bolo čitateľovi vždy jasné, čo sa aktuálne snažíme dokázať. Úloha sa samozrejme dala riešiť aj priamo, napr. tak, že dokážeme, že $a^2 + ab - n$ bude nenulový štvorec práve vtedy, keď $ab = n$. Spísať takéto riešenie správne je však náročnejšie a ľahko sa môže stať neprehľadným.

Napokon by sme ešte chceli podotknúť, že je vždy potrebné sa zamyslieť aj nad okrajovými prípadmi, čo v tejto úlohe bola 1. Pre 1 totiž nevieme vybrať $d/2$ deliteľov a tento prípad treba popísať osobitne.

5.

Opravovali: **Dano Onduš a Martin „&y“ Andričík**
Počet riešení: 8 Najkrajšie riešenie: **Martin Marcinčák**



Postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ spĺňa $a_1 = 0$ a pre každé $k \geq 1$ platí $|a_{k+1}| = |a_k + 1|$. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}.$$

Riešenie

Pozrime sa na postupnosť $\{b_i\}_{i=1}^{n} = \{|a_i|\}_{i=1}^{n}$. O nej vieme, že je nezáporná a $b_{i+1} = b_i \pm 1$. Konkrétne $b_{i+1} = b_i + 1$ práve vtedy, ak a_i bolo nezáporné, a $b_{i+1} = b_i - 1$ práve vtedy, ak a_i bolo záporné. Vidíme, že postupnosť a_i môžeme jednoznačne určiť zadaním postupnosti b_i. Zafarbime si teda (kvôli prehľadnosti) bordovou farbou tie b_i, pre ktoré $b_{i+1} = b_i + 1$ a karmínovou tie b_j, kde $b_{j+1} = b_j - 1$. Nezafarbené ostane iba b_n.

Poďme teraz indukciou dokázať, že $a_1 + \dots + a_n \geq -\frac{n}{2}$. Na začiatok sa presvedčíme, že pre $n = 1, 2$ tvrdenie platí (vyskúšaním 1, resp. 2 možností). Pre indukčný krok $n - 2 \to n$ si vezmime prvé karmínové b_i (ak žiadne karmínové nie je, tak sú všetky $a_n \geq 0$ a tvrdenie platí). To muselo mať bordového predchodcu b_{i-1}. Teraz z našej postupnosti vyškrtnime b_{i-1} a b_i. Dostaneme novú postupnosť $\{b_j\}_{j=1}^{i-2} \cup \{b_j\}_{j=i+1}^{n}$ znovu spĺňajúcu požadované *vlastnosti*, ktorej opačným smerom zodpovedá práve $\{a_j\}_{j=1}^{i-2} \cup \{a_j\}_{j=i+1}^{n}$ spĺňajúca podmienku zo zadania. Zároveň súčet vyškrtnutých $a_{i-1} + a_i = -1$. Pre zostávajúcu časť postupnosti potrebujeme dokázať $a_1 + \dots + a_{i-2} + a_{i+1} + \dots + a_n \geq -\frac{n}{2} - (-1) = -\frac{n-2}{2}$. To je však práve indukčný predpoklad pre $n - 2$, takže sme tvrdenie dokázali.

Komentár

Ako vidno zo vzoráku aj počtu bodov, táto úloha mala pomerne jednoduché riešenie aj napriek tomu, že išlo o 5ku. Väčšina z vás využila podobný trik s vyškrtnutím dvoch nasledujúcich členov. To je veľmi pekný príklad indukcie, kde je prirodzenejšie robiť indukčný krok z n na $n + 2$.

6. Opravovali: **Martin „Kopy“ Kopčány a Matúš Masrna**
Počet riešení: 7 Najkrajšie riešenie: **Matúš Libák**

Majme pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole B. Nech BD je výška z vrcholu B na stranu AC (bod D leží na AC). Ďalej označme R, S a T postupne stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABD, CBD a ABC. Ukážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku RST leží na priamke AC.

Riešenie

Označme si veľkosť uhla CAB ako 2α a veľkosť uhla BCA ako 2β. Súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je 180 stupňov, tak $2\alpha + 2\beta + 90 = 180$, z čoho vyplýva, že $\alpha + \beta = 45$.

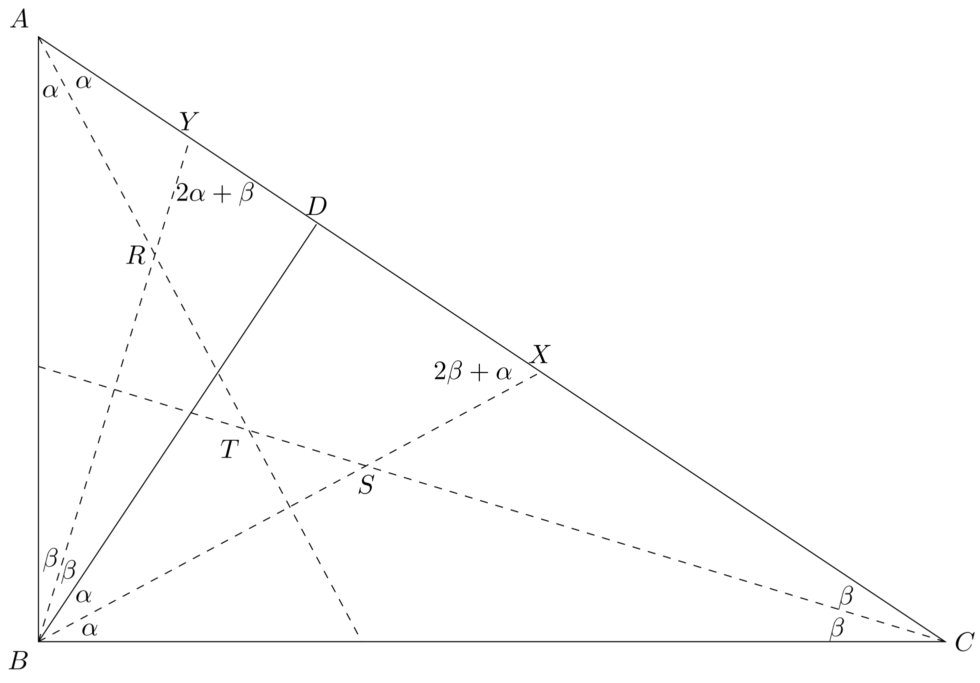
Trojuholník ADB je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole D, preto je veľkosť uhla DBA rovná $180 - 2\alpha - 90 = 2\beta$. Podobne, BDC je pravouhlý, takže veľkosť uhla $CBD = 180 - 90 - 2\beta = 2\alpha$.

Stredy vpísaných kružníc sa nachádzajú na priesečníkoch osí uhlov daného trojuholníka. Z toho vyplýva, že body R a T ležia oba na osi uhla BAC a body S a T ležia oba na osi uhla BCA. Vďaka tomu, že sú to osi uhlov platí, že $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle TAC| = \alpha$ a $|\sphericalangle BCT| = |\sphericalangle TCA| = \beta$.

Priesečník priamok BS a AC označme ako X a priesečník priamok BR a AC označme ako Y. Veľkosť uhla BXA vieme vypočítať, lebo poznáme zvyšné dva uhly v trojuholníku BXA.

$$|\sphericalangle BXA| = 180 - |\sphericalangle BAX| - |\sphericalangle XBA| = 180 - |\sphericalangle BAX| - |\sphericalangle ABD| - \frac{|\sphericalangle CBD|}{2} = 180 - 2\alpha - 2\beta - \alpha = 90 - \alpha = 2\beta + \alpha$$

Z toho vyplýva, že trojuholník BXA je rovnoramenný, lebo uhly BXA a XBA sú zhodné. Podobne uhol BYC vieme vypočítať ako $180 - |\sphericalangle YCB| - |\sphericalangle CBY| = 2\alpha + \beta$, takže aj trojuholník CBY je rovnoramenný.



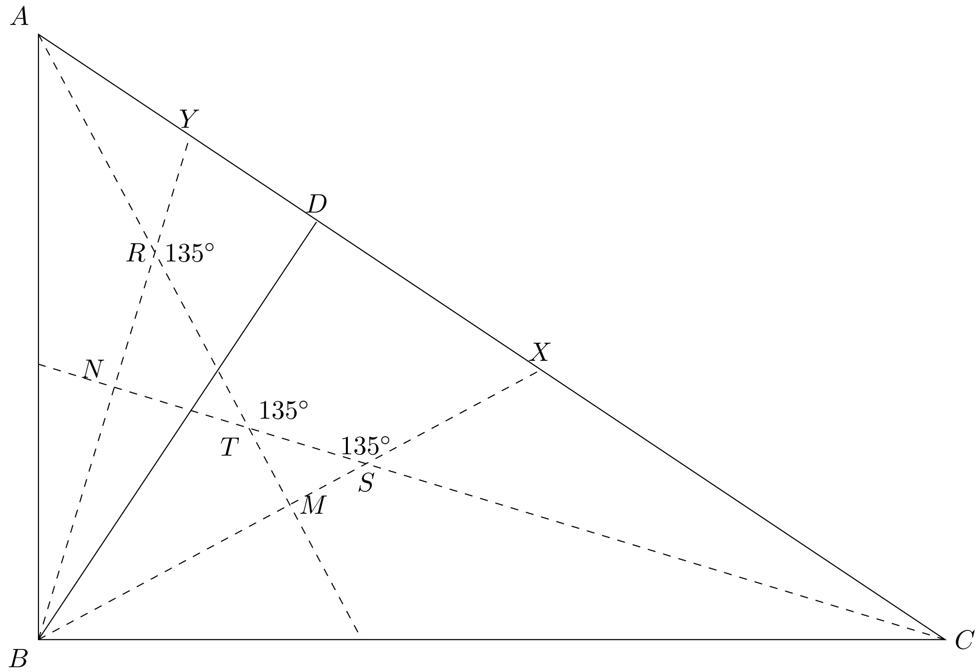
Priesečník priamok AT a BS označme ako M a priesečník priamok CT a BR ako N. Úsečka AM je os uhla BAX v rovnoramennom trojuholníku, takže je to zároveň jeho výška aj jeho ťažnica. Bod M je preto stred strany BX a zároveň priamka AM je kolmá na BX. Podobne bod N je stredom strany BY a zároveň uhol YNC je pravý.

Súčet uhlov v trojuholníku je 180 stupňov, preto $|\sphericalangle CTA| = 180 - |\sphericalangle TCA| - |\sphericalangle TAC| = 180 - \alpha - \beta = 180 - 45 = 135$. Uhly k nemu susedné, teda STM a RTN majú veľkosť 45 stupňov.

Veľkosť uhla BSC vyrátame z trojuholníka BSC ako $180 - |\sphericalangle SBC| - |\sphericalangle BCS| = 180 - \alpha - \beta = 180 - 45 = 135$ stupňov. Z toho vyplýva, že jeho susedný uhol TSM má veľkosť 45 stupňov. Podobne veľkosť uhla ARB vieme vypočítať z trojuholníka ARB ako $180 - \alpha - \beta = 135$ stupňov. Uhol TRN je k nemu susedný a má veľkosť 45 stupňov.

Z toho vyplýva, že trojuholníky TMS a TNR sú rovnoramenné so základňami TS, respektíve TR. Vďaka tomu os strany TS prechádza cez bod M a os strany TR prechádza cez bod N.

Os strany TS prechádza cez stred strany BX (M) a je rovnobežná s BY (pretože obe sú kolmé na priamku CT). Z toho vyplýva, že os strany TS je stredná priečka trojuholníka BXY a pretína úsečku XY v jej strede, označme si ho G. Os strany TR pretína BY v jej strede (N) a zároveň je rovnobežná s BX, teda je to stredná priečka trojuholníka BYX a pretína úsečku XY tiež v jej strede G.



Z toho vyplýva, že os strany TR a os strany TS sa pretínajú na strane CA. Stred kružnice opísanej trojuholníku STR vieme nájsť pomocou osí jeho strán. Stredom kružnice opísanej trojuholníku STR je preto bod G, ktorý leží na priamke AC.

Komentár

O tejto úlohe musíme povedať dve veci. Prvou je, že rozumieme, prečo vyzerala odstrašujúco. Po nakreslení náčrtu sme mohli dostať trojuholník s jednou výškou, troma až siedmimi osami a štyrmi až siedmimi doplňujúcimi bodmi, a to rátame iba tie dôležité veci (ktoré ako všetci vieme, nie sú nikdy to jediné v náčrte, ja som napríklad neodolal a pri riešení úlohy som si nakreslil aspoň jednu kružnicu). Tento fakt potvrdzuje aj menší počet riešení.

Avšak druhá vec je, že presne tá istá vlastnosť, ktorá ju robila odstrašujúcou, ju vedela urobiť dostupnou aj pre menej vycibrených geometričov, resp. pre rôzne zameraných geometričov. Veľa informácií na úvod znamená veľa rôznych smerov, v ktorých sa môžeme v našom riešení uberať. Pre každého môže fungovať niečo iné. Toto dokazuje fakt, že každé správne riešenie, ktoré sme dostali, bolo odlišné. Dokonca boli všetky z nich rôzne od vzorového, ktoré sme si tiež vyberali z viacero možností. Videli sme goniometriu, Švrčkov bod, rôzne druhy rovnobežníkov aj podobnosť trojuholníkov.

Zovšeobecnenie postupu, ktorým vám chceme poradiť by teda vyzeral nejako takto. Tri vpísané kružnice vytvorili veľa osí uhlov. To spolu so zadanými pravými uhlami navádzalo na uhlenie. Po tom, ako sme si vypísali všetky zhodné uhly a vyčíslili sme, čo sme mohli, dalo nám to veľa možností na ďalší krok. Tým bolo pozretie sa na osi strán trojuholníka RST a rozmyslenie si, prečo by sa mohli stretávať na strane AC.

Jedno z nich bolo naše vzorové riešenie, ktoré koniec koncov nepoužilo nič viac ako základné uhlenie a vlastnosti trojuholníkov.

Na záver sme vybrali jedno poučenie z tejto úlohy pre podobné typy úloh. Často je najväčší nepriateľ sa do úlohy jednoducho pustiť. Skúsiť sa vybrať smerom, na ktorý máte pocit, že najviac navádza zadanie alebo náčrt. Keď počas riešenia narazíte na nejakého ešte väčšieho nepriateľa, skúste sa znovu zastaviť a rozmyslieť, ktorý smer by mohol viesť k danej časti dôkazu. Ak nič nevymyslíte, dokáže pomôcť narysovanie (tip: rysovanie pomocou softvéru na počítači je jednoduché a presné).

Napríklad v našom riešení by sa mohlo stať, že by sme urobili iba prvý krok s uhlením a potom sme zistili, že nevieme, ako to využiť na dokázanie úlohy. Tak by sme si jednoducho obrázok narysovali, dorysovali tam osi strán trojuholníka RST (keďže ich priesečník je predmetom záujmu, tak takmer určite budú viesť k riešeniu) a mohli si všimnúť hneď niekoľko vecí. Napríklad to, že prechádzajú bodmi N a M, ich rovnobežnosť s úsečkami BX a BY prípadne, že ich priesečník je zároveň stredom úsečky XY. To nám dáva konkrétnejšie ciele, ku ktorým vieme dôjsť pomocou už získaných informácií a z ktorých je zároveň veľmi jednoduché riešenie doklepnúť.

Zadania úloh letného semestra 47. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `seminar.strom.sk`.

2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **17. apríla 2023**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke `seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf`.

1. Pre kladné celé n dokážte, že platí

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)<2.$$

2. Majme konvexný štvoruholník $ABCD$. Označme E stred strany AB a F stred strany CD. Pre tento štvoruholník platí, že $|EF| = \frac{|AD|+|BC|}{2}$. Dokážte, že strany AD a BC sú rovnobežné.

3. Anton a Beton hrajú hru s číslami od 1 do 2022. Na začiatku sú čísla zoradené zostupne. Anton má silu A a Beton má silu B. Hráči sa striedajú v ťahoch, počnúc Antonom. V každom ťahu si môže hráč so silou M vybrať nejakých M čísel a ľubovoľne ich preusporiadať. Beton chce rad čísel usporiadať vzostupne, Anton mu v tom chce zabrániť. Zistite, či sa to Betonovi podarí za konečný počet ťahov, ak sila Antona je $A = 1000$ a Beton má silu

a) $B = 1000$,

b) $B = 1001$,

c) $B = 1002$.

4. Majme úsečku AB a bod P v jej strede. Nech T je bod dotyku dotyčnice vedenej z bodu A ku kružnici s priemerom PB. Vyjadrite dĺžku úsečky PT v závislosti od dĺžky AB.

5. Postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ spĺňa $a_1 = 1$ a $a_{k+1} = a_k^2 + 1$ pre všetky kladné celé čísla k. Dokážte, že existuje kladné celé číslo n také, že a_n je deliteľné prvočíslom, ktoré obsahuje viac ako 2022 cifier.

6. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že

$$f(f(x)-y) = f(x) + f(f(y)-f(-x)) + x$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$.

Poradie po 1. sérii letného semestra 47. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Lucia Chladná	S2	GAMČABA	9	9	9	8	9	9	0	54
2.	Eva Krajčiová	S1	GAlejKE	9	9	9	6	7	6	0	49
3. - 6.	Marek Horváth	S2	GKonšPO	9	9	9	9	-	-	0	45
	Michal Iľkovič	S2	GSMTŠPO	9	9	9	-	9	-	0	45
	Richard Vodička	S2	GAlejKE	9	9	9	9	-	-	0	45
	Anna Podmanická	S2	GVaršZA	9	9	9	9	-	-	0	45
7. - 8.	Oliver Seman	S1	GAlejKE	9	9	9	-	3	-	0	39
	Matúš Pokorný	S1	GAMČABA	8	9	9	4	-	-	0	39
9. - 10.	Veronika Chovancová	S4	PiarGTN	9	9	9	9	-	-	0	36
	Michal Vodička	Z9	GAlejKE	9	9	9	-	-	-	0	36
11.	Janka Urbánová	Z9	GAlejKE	9	9	4	-	1	-	0	32
12. - 13.	Rudolf Kusý	S1	GAMČABA	0	7	9	7	-	-	0	30
	Martin Marcinčák	S3	Šrobárka	9	3	9	-	9	-	0	30
14. - 20.	Tomáš Kubrický	S2	GPoštKE	9	9	9	-	-	-	0	27
	Veronika Vodičková	S2	GAlejKE	9	9	9	-	-	-	0	27
	Eduard Fedorčuk	S3	EGJAKKE	9	9	-	-	9	-	0	27
	Oskar Cacara	S1	GPoštKE	9	9	-	-	-	-	0	27
	Alenka Bálintová	Z9	BGMHSuč	8	8	3	-	-	-	0	27
	Martin Dudjak	S1	SMládPP	9	9	-	-	-	-	0	27
	Samuel Šandor	S1	GPoštKE	9	9	-	-	-	-	0	27
21.	Matúš Libák	S2	GAlejKE	9	6	-	1	-	9	0	26
22.	Branislav Ječim	S3	GŠkolSN	9	9	7	-	-	-	0	25
23. - 24.	Martina Osuská	Z9	ZDrJDMA	9	5	3	-	-	-	0	22
	Martin Mentel	Z9	BGMHSuč	7	7	1	-	-	-	0	22
25. - 26.	Natália Poliačiková	S2	GPoštKE	9	-	9	-	-	-	0	18
	Martin Šmilňák	S3	GAlejKE	9	9	-	-	-	-	0	18
27.	Maxima Anna Alžbeta Bednarčíková	S2	GAlejKE	7	9	-	-	-	-	0	16
28.	Katarína Farbulová	S2	GPoštKE	9	6	-	-	-	-	0	15
29. - 30.	Bianka Gurská	S3	GPoštKE	9	3	2	-	-	-	0	14
	Ondrej Králik	S2	GAlejKE	5	9	-	-	-	-	0	14
31.	Tomáš Sukeľ	S1	GAGLSHE	9	2	-	-	-	-	0	13
32.	Michal Almáši	S4	GPMláKE	5	7	-	-	-	-	0	12
33. - 34.	Vladimír Slanina	S2	GPoštKE	3	8	-	-	-	-	0	11
	Lucia Kleščová	S2	GPoštKE	5	6	-	-	-	-	0	11
35.	Soňa Vasiľová	S2	GKukuPP	-	6	2	-	-	-	0	8
36.	Nina Anna Betáková	S1	GAGLSHE	5	-	1	-	-	-	0	7
37.	Sarah Klopstock	Z9	ŠpMNDaG	1	1	0	2	-	1	0	6
38.	Tomáš Boledovič	Z9	CZNarBA	5	-	-	-	-	-	0	5
39. - 40.	Juraj Kramár	S2	GAlejKE	4	-	-	-	-	-	0	4
	Michal Ferdinandy	Z9	GAlejKE	0	1	2	-	-	-	0	4
41. - 43.	Tomáš Lang	Z9	ZOKožSN	0	-	-	-	-	0	0	0
	Ladislav Jakab	S3	SOTBrKN	0	0	-	0	0	0	0	0
	Lucia Szabó	S2	GPJŠaRV	0	0	0	0	-	0	0	0

Názov: STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Apríl 2023 • Letný semester 47. ročníka (2022/2023)
Web: `seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`
Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese `riesenia.strom@strom.sk`.

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: `zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.