STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj!

Je tu ďalší časopis STROMu, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najlepších z vás. Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústredenia v obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi. Ak sa ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s tebou uvidíme!

STROMisti

1. Opravovali: **Natália „Naťa" Čigašová a Oskar Hritz**
Počet riešení: 30 Najkrajšie riešenia: **Michal Vodička a Eduard Fedorčuk**

Pre kladné celé n dokážte, že platí
$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)<2.$$

Riešenie

Najprv sa pozrieme, či naozaj môžeme počítať úlohu pre všetky kladné celé n. Napríklad hneď pre $n=1$ bude hodnota poslednej zátvorky $1+\frac{1}{1^2-1}=1+\frac{1}{0}$, čo zrejme nemôže nastať. Preto budeme brať do úvahy iba $n\geq 2$.

Ďalej by sme chceli pracovať s výrazom zo zadania, ale je to trochu náročné v jeho pôvodnej forme. Všetky činitele výrazu sú v tvare $1+\frac{1}{k^2-1}$, čo vieme upraviť na tvar:
$$1+\frac{1}{k^2-1}=\frac{k^2-1}{k^2-1}+\frac{1}{k^2-1}=\frac{k^2-1+1}{k^2-1}=\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}.$$

Náš pôvodný výraz vďaka tomu prepíšeme na:
$$\frac{2^2}{(2-1)(2+1)}\cdot\frac{3^2}{(3-1)(3+1)}\cdots\frac{n^2}{(n-1)(n+1)},$$

čo je rovné:
$$\frac{2^2\cdot 3^2\cdots n^2}{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\cdots(n-1)(n+1)}=\frac{2^2\cdot 3^2\cdots n^2}{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdots(n-1)(n+1)}.$$

Pozrieme sa teraz samostatne na čitateľa a menovateľa. V čitateli máme $2^2\cdot 3^2\cdots n^2=(n!)^2$. V menovateli máme:

- $(n-1)$-krát číslo $(k-1)$ pre $2\leq k\leq n$, čo je dokopy $1\cdot 2\cdots(n-1)=(n-1)!$.
- $(n-1)$-krát číslo $(k+1)$ pre $2\leq k\leq n$, čo je dokopy $3\cdot 4\cdots(n+1)=\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1)}{2}=\frac{(n+1)!}{2}$.

Z toho nám vychádza zlomok:
$$\frac{(n!)^2}{(n-1)!\cdot\frac{(n+1)!}{2}}=\frac{n!\cdot n}{\frac{(n+1)!}{2}}=\frac{n}{\frac{(n+1)}{2}}=\frac{2n}{n+1}=\frac{(n+1)+(n-1)}{n+1}=1+\frac{n-1}{n+1}.$$

Číslo $n-1$ je zrejme menšie ako $n+1$, a keďže sú obe čísla kladné, tak bude zlomok $\frac{n-1}{n+1}<1$, teda $1+\frac{n-1}{n+1}<2$.

Komentár

Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. Tieto spôsoby riešenia zväčša spadali do dvoch kategórií: úprava výrazu do tvaru, z ktorého bolo riešenie zjavné, a matematická indukcia.

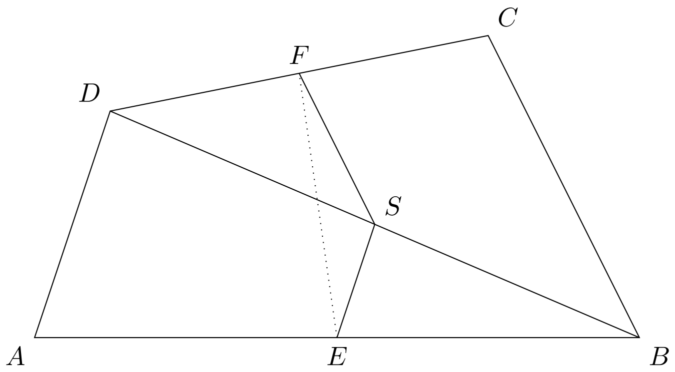
V oboch prípadoch bolo potrebné si dať pozor na isté kroky v postupe. Pri úprave výrazu bolo najdôležitejšou časťou riešenia ukázať (ale hlavne aj dokázať) krátenie čitateľov a menovateľov. Toto krátenie bolo možné uskutočniť viacerými metódami, len bolo nutné, aby zvolená metóda bola doklepnutá až do konca.

Pri matematickej indukcii bolo zase dôležité, aby boli dodržané oba jej kroky, menovite otestovaný najmenší prípad a správne prevedený indukčný krok. Matematická indukcia je celkom silná zbraň a vrelo odporúčame, aby sa na ňu tí, čo ju nepoznajú alebo úlohy s ňou neobľubujú, bližšie pozreli. :D

2. Opravovali: **Ľubo Vargovčík a Michal Masrna**
Počet riešení: 23 Najkrajšie riešenia: **Michal Vodička a Richard Vodička**

Majme konvexný štvoruholník $ABCD$. Označme E stred strany AB a F stred strany CD. Pre tento štvoruholník platí, že $|EF|=\frac{|AD|+|BC|}{2}$. Dokážte, že strany AD a BC sú rovnobežné.

Riešenie



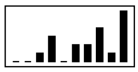
Na začiatku si vyznačme uhlopriečku BD a jej stred si označme S. Trojuholník ADB má strednú priečku ES a trojuholník BCD má strednú priečku SF, pretože E a F sú stredy strán AB a CD a S je stred strany BD. Z vlastností stredných priečok vyplýva $|ES| = \frac{|AD|}{2}$ a $|SF| = \frac{|BC|}{2}$. Zo zadania vieme, že $|EF| = \frac{|AD|+|BC|}{2}$, takže $|ES| + |SF| = \frac{|AD|}{2} + \frac{|BC|}{2} = \frac{|AD|+|BC|}{2} = |EF|$. Body E, S a F preto musia ležať všetky na jednej priamke.

Ďalej z vlastností stredných priečok vieme, že ES je rovnobežné s AD a SF je rovnobežné s BC. Úsečky ES a SF ležia na jednej priamke, takže úsečky AD a BC sú obe rovnobežné s touto priamkou, a preto sú aj úsečky AD a BC navzájom rovnobežné, čo sme chceli dokázať.

Komentár

Vo vzorovom riešení udávame podľa nás najelegantnejšie a najkrajšie riešenie, každopádne, úloha sa dala vyriešiť rôznymi spôsobmi. Mnohí z vás napríklad úspešne využili stredovú súmernosť a premietli celý štvoruholník alebo iba bod D podľa stredu E a aplikovali podobnú úvahu na body na body D', B a C.

3. Opravovali: **Erik „Rici“ Novák a Mirka Horváthová**
Počet riešení: 19 Najkrajšie riešenie: **Marek Horváth**



Anton a Beton hrajú hru s číslami od 1 do 2022. Na začiatku sú čísla zoradené zostupne. Anton má silu A a Beton má silu B. Hráči sa striedajú v ťahoch, počnúc Antonom. V každom ťahu si môže hráč so silou M vybrať nejakých M čísel a ľubovoľne ich preusporiadať. Beton chce rad čísel usporiadať vzostupne, Anton mu v tom chce zabrániť. Zistite, či sa to Betonovi podarí za konečný počet ťahov, ak sila Antona je $A = 1000$ a Beton má silu

a) $B = 1000$,

b) $B = 1001$,

c) $B = 1002$.

Riešenie

Postupne si rozoberieme všetky možnosti síl Betona a povieme si, v ktorých z nich vie vyhrať. Pozrime sa najprv na prípad, kedy $A = 1000$ aj $B = 1000$.

Začne Anton, ktorý nespraví nič. Následne po ňom Beton využije svoju silu tak, aby preusporiadal nejakých 1000 čísel. Po jeho ťahu však opäť nasleduje Anton, ktorý čísla vráti do pôvodného stavu. Takto bude hra pokračovať celý čas, a tak v tomto prípade Beton nedokáže vyhrať za konečný počet ťahov.

Teraz si rozoberme prípad, keď $A = 1000$ a $B = 1001$.

Rad 2022 čísel si pomyselne rozdelíme na polovicu tak, že čísla na pozíciách 1 až 1011 označíme ako prvá polovica radu a čísla 1012 až 2022 ako druhá polovica radu. Na začiatku sú čísla usporiadané zostupne, teda na to, aby na konci hry boli čísla usporiadané vzostupne, všetky čísla z prvej polovice musia skončiť na miestach v druhej polovici a naopak.

Ak chceme, aby číslo prešlo z jednej polovice na druhú, musíme v druhej polovici nájsť číslo, s ktorým sa číslo z prvej polovice vymení. Z Dirichletovho princípu však vyplýva, že aspoň jedno číslo z tých, ktoré si Beton vyberie, neprejde na opačnú polovicu. Keďže si vyberá 1001 čísel, musí si z jednej polovice vybrať aspoň o jedno číslo viac ako z druhej.

Následne je na ťahu Anton, ktorý len všetkých nanajvýš 1000 čísel, ktoré sú teraz v správnej polovici radu, dá do pôvodného stavu, a teda ani v prípade, ak $A = 1000$ a $B = 1001$, Beton vyhrať nemôže.

Pozrime sa ešte na posledný prípad, keď $A = 1000$ a $B = 1002$. Anton začne a preusporiada nejakých 1000 čísel. Beton následne môže späť preusporiadať všetkých Antonových 1000 čísel a zvýši mu ešte sila 2. Pomocou nej môže vymeniť čísla 1 a 2022, čím ich dostane na správne pozície. Následne pôjde Anton, ktorý preusporiada nejakých 1000 čísel. Beton potom môže vrátiť všetkých 1000 Antonových čísel a tentoraz vymeniť 2 a 2021. Takto bude hra pokračovať. Beton vždy dokáže vrátiť Antonov ťah a navyše správne umiestniť jednu dvojicu. Po 1011 ťahoch teda budú čísla zoradené podľa Betona.

Komentár

Možnosti, kde $B = 1000$ a $B = 1002$ ste vyriešili zväčša bez problémov. Ťažší už bol prípad pre $B = 1001$, v ktorom ste síce prišli na to, že Beton stále vyhrať nevie, no podložili ste to argumentmi, ktoré nie sú stále pravda. Totižto mnohí ste prehlásili, že 1001-ica čísel sa nikdy nedá dosadiť na správne miesta. To ale nie je pravda, veď keby rad vyzeral ako $(1001, 1000, \ldots, 1, 1002, \ldots, 2022)$, tak by sme vedeli prepermutovať prvú 1001-icu a dostať vzostupný rad. Pointou nebolo, že sa nikdy nedá preusporiadaním 1001-ice dosadiť všetky na svoje miesta, ale že sa to nedá na začiatku a Anton to vie tak udržať, čo bolo treba dokázať.

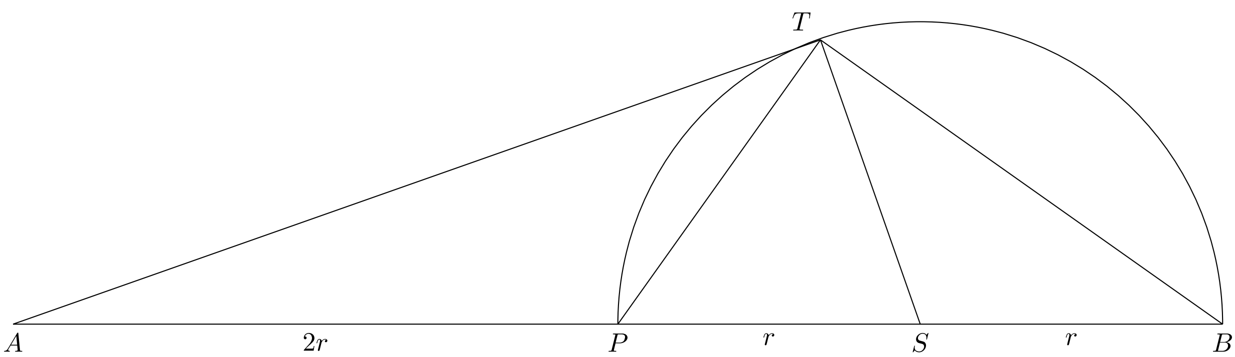
4.

Opravovali: **Števo Vašak a Paťo Paľovčík**
Počet riešení: 28 Najkrajšie riešenie: **Eva Krajčiová**

Majme úsečku AB a bod P v jej strede. Nech T je bod dotyku dotyčnice vedenej z bodu A ku kružnici s priemerom PB. Vyjadrite dĺžku úsečky PT v závislosti od dĺžky AB.

Riešenie

Označme si stred kružnice S a jej polomer r. Všimnime si, že keďže P je stred AB, tak vieme povedať, že $|AP| = 2r$, $|PS| = |SB| = r$ a $|AB| = 4r$.



Skúsme teraz ukázať, že trojuholníky ABT a ATP sú podobné.

Tieto trojuholníky majú $\sphericalangle TAB$ spoločný. Nájdime jednu dvojicu rovnako veľkých uhlov a dokážme, že trojuholníky sú podobné podľa vety uu. ST je tiež polomer kružnice, a teda trojuholník BTS bude rovnoramenný so základňou BT. Označme si uhly pri jeho základni ako α. Všimnime si, že $\sphericalangle PTB$ je uhol nad priemerom kružnice PB. Tým pádom je pravý (Tálesova kružnica) a $|\sphericalangle PTS|$ je $90 - |\sphericalangle STB| = 90 - \alpha$. Opäť si všimnime, že $\sphericalangle ATS$ je pravý, pretože AT je dotyčnicou ku kružnici. $|\sphericalangle ATP|$ je $90 - |\sphericalangle PTS| = 90 - (90 - \alpha) = \alpha$. Našli sme takto ešte jednu dvojicu rovnakých uhlov $|\sphericalangle ABT| = |\sphericalangle ATP| = \alpha$, a teda vieme, že trojuholníky ATP a ABT sú podobné. Odtiaľ

$$\frac{|PT|}{|BT|} = \frac{|AT|}{|AB|}.$$

$|AB|$ už máme vyjadrené ako $4r$. Podľa Pytagorovej vety teraz už vieme z pravouhlého trojuholníka AST dorátať

$$|AT| = \sqrt{|AS|^2 - |ST|^2} = \sqrt{(3r)^2 - r^2} = \sqrt{8r^2} = 2\sqrt{2}r.$$

Po dosadení do pomerov dostávame

$$\frac{|PT|}{|BT|} = \frac{2\sqrt{2}r}{4r} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

čiže $|BT| = \sqrt{2}|PT|$. Teraz si zapíšeme Pytagorovu vetu v trojuholníku PBT: $|PT|^2 + |BT|^2 = |PB|^2$. $|PB|$ už poznáme ako $2r$ a tiež si môžeme dosadiť vzťah, ktorý sme vyrátali pred chvíľou.

$$\begin{aligned} |PT|^2 + (\sqrt{2}|PT|)^2 &= (2r)^2 \\ |PT|^2 + 2|PT|^2 &= 4r^2 \\ |PT|^2 &= \frac{4r^2}{3} \\ |PT| &= \frac{2r}{\sqrt{3}} \\ |PT| &= \frac{4r}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

A keďže $|AB| = 4r$, tak to tam môžeme jednoducho dosadiť a dostávame

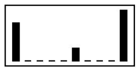
$$|PT| = \frac{|AB|}{2\sqrt{3}}.$$

Komentár

Úloha dopadla veľmi dobre, o čom svedčí množstvo deväťbodových riešení. K riešeniu ste používali viaceré prístupy, možno ešte častejší ako tento zo vzorového riešenia bol pomocou kosínusovej vety, avšak aj inými postupmi väčšina z vás dospela k správnemu riešeniu, čo nás veľmi teší. :)

5. Opravovali: **Daniel Onduš a Viliam Geffert**

Počet riešení: 8 Najkrajšie riešenie: **Lucka Chladná**



Postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ spĺňa $a_1 = 1$ a $a_{k+1} = a_k^2 + 1$ pre všetky kladné celé čísla k. Dokážte, že existuje kladné celé číslo n také, že a_n je deliteľné prvočíslom, ktoré obsahuje viac ako 2022 cifier.

Riešenie

Nech p je prvočíslo, ktoré delí nejaký člen postupnosti a_n. Začnime tým, že si dokážeme pomocné tvrdenie o zvyškoch po delení členov postupnosti prvočíslom p, a t že postupnosť týchto zvyškov bude mať periódu m, kde m je index prvého členu, ktorý je deliteľný prvočíslom p. Pre dokázanie tohto tvrdenia uvažujme, že člen a_0 je definovaný. a_0 by mal hodnotu 0, keďže $a_1 = a_0^2 + 1 = 0^2 + 1$.

Všeobecne chceme prehlásiť, že $a_{m+n} \equiv a_n \pmod{p}$, čo ukážeme matematickou indukciou. Tvrdenie pre $n = 0$ samozrejme platí. Nech platí $a_{m+n} \equiv a_n \pmod{p}$. Potom $a_{m+n+1} = a_{m+n}^2 + 1$ a $a_{n+1} = a_n^2 + 1$, z čoho okamžite plynie, že $a_{m+n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{p}$.

Môžeme si všimnúť, že ako dôsledok bude pre dané p a m $a_{km} \equiv 0 \mod p$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$.

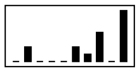
Využime teraz toto tvrdenie na dokázanie hlavného tvrdenia. Vezmime si všetky prvočísla p_1 až p_n také, že každé delí aspoň jeden člen postupnosti. K nim si vezmime čísla i_1 až i_n, ktoré nám vyjadrujú index výskytu prvého členu postupnosti, ktorý bude deliteľný prvočíslom p_n (i_1 pre člen deliteľný p_1 atď.). Ako sme už ukázali, ak člen postupnosti a_m bude deliteľný prvočíslom p, tak každý ďalší člen a_{km}, kde $k \in \mathbb{N}$ bude taktiež deliteľný prvočíslom p. Označme si súčin čísel i_1 až i_n ako j. Vieme teda prehlásiť, že člen postupnosti a_j bude deliteľný prvočíslami p_1 až p_n. Potom ale aj a_j^2 je deliteľné p_1 až p_n, z čoho $a_{j+1} \equiv a_j^2 + 1$ dáva zvyšok 1 po delení každým z nich. No keďže vieme, že $a_{j+1} \neq 1$, tak musí platiť, že a_{j+1} je deliteľné ďalším prvočíslom, ktoré má viac ako 2022 cifier.

Komentár

Túto úlohu zopár z vás vyriešilo iným spôsobom, a to tak, že si v druhej časti riešenia dokázalo, že existuje nekonečne veľa prvočísel, ktoré budú deliť nejaký člen postupnosti. A keďže zadanie od nás požaduje konečné číslo (prvočíslo s viac ako 2022 ciframi), tak vieme, že táto situácia nastane.

6.

Opravovali: **Martin Masrna a Kristín Mišlanová**
Počet riešení: 16 Najkrajšie riešenia: **Eva Krajčiová, Oliver Seman**



Nájdite všetky funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ také, že

$$f(f(x)-y)=f(x)+f(f(y)-f(-x))+x$$

pre všetky $x,y\in\mathbb{R}$.

Riešenie

Keďže rovnosť platí pre všetky reálne čísla x, y, tak sa môžeme pozrieť, čo dostaneme z niekoľkých konkrétnych dosadení. Z dosadenia $[0,0]$ máme:

$$\begin{aligned} f(f(0)-0)&=f(0)+f(f(0)-f(0))+0,\\ f(f(0))&=2f(0). \end{aligned}$$

Následne vezmime dosadenie $[0,f(0)]$:

$$\begin{aligned} f(f(0)-f(0))&=f(0)+f(f(f(0))-f(0))+0,\\ f(0)&=f(0)+f(f(f(0))-f(0)),\\ 0&=f(f(f(0))-f(0)). \end{aligned}$$

Využitím dvakrát výsledku z prvého dosadenia $f(f(0))=2f(0)$ dostaneme:

$$\begin{aligned} 0&=f(2f(0)-f(0)),\\ 0&=f(f(0)),\\ 0&=2f(0),\\ 0&=f(0). \end{aligned}$$

Teraz sa pozrieme na dosadenie $[0,y]$, pričom v úpravách už budeme využívať poznatok, že $f(0)=0$:

$$\begin{aligned} f(f(0)-y)&=f(0)+f(f(y)-f(0))+0,\\ f(-y)&=f(f(y)). \end{aligned}$$

Posledné dosadenie, ktoré budeme potrebovať, je $[x,f(x)]$:

$$\begin{aligned} f(f(x)-f(x))&=f(x)+f(f(f(x))-f(-x))+x,\\ f(0)&=f(x)+f(f(f(x))-f(-x))+x,\\ 0&=f(x)+f(f(f(x))-f(-x))+x. \end{aligned}$$

Vďaka tomu, čo sme už ukázali pri treťom dosadení, vieme, že pre všetky reálne x musí platiť $f(-x)=f(f(x))$. Takže poslednú rovnosť vieme zjednodušiť na:

$$\begin{aligned} 0&=f(x)+f(f(-x)-f(-x))+x,\\ 0&=f(x)+f(0)+x,\\ f(x)&=-x. \end{aligned}$$

V tejto chvíli sme ukázali, že ak riešenie existuje, tak potom je ním funkcia v tvare $f(x)=-x$ pre všetky $x\in\mathbb{R}$. Nemôžeme to však ešte prehlásiť za riešenie, pretože úpravy, ktoré sme robili, neboli ekvivalentné, takže to potrebujeme ešte dosadiť do pôvodnej rovnice:

$$\begin{aligned} f(f(x)-y)&=f(x)+f(f(y)-f(-x))+x,\\ f(-x-y)&=-x+f(-y-x)+x,\\ x+y&=y+x. \end{aligned}$$

Vidíme, že funkcia $f(x)=-x$ vyhovuje pôvodnému zadaniu, a teda je to jediné riešenie danej rovnice.

Komentár

Jediná rada na záver: riešenie každej funkcionálky musí končiť skúškou a dosadením do pôvodnej rovnice, bez toho úloha nie je kompletná. Mohlo by sa totižto stať, že daná úloha vôbec riešenie nemá.

Konečné poradie letného semestra 47. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Lucia Chladná	S2	GAMČABA	54	9	9	9	9	9	9	0	108
2.	Eva Krajčiová	S1	GAlejKE	49	9	-	9	9	9	9	0	103
3.	Richard Vodička	S2	GAlejKE	45	9	9	-	9	9	9	0	99
4.	Anna Podmanická	S2	GVaršZA	45	8	9	9	9	-	9	0	98
5.	Michal Iľkovič	S2	GSMTŠPO	45	9	9	8	9	-	7	0	95
6.	Oliver Seman	S1	GAlejKE	39	9	-	9	9	9	9	0	93
7.	Marek Horváth	S2	GKonšPO	45	9	-	9	9	-	7	0	86
8. - 9.	Michal Vodička	Z9	GAlejKE	36	9	9	-	9	-	-	0	72
	Tomáš Kubrický	S2	GPoštKE	27	9	9	-	9	-	9	0	72
10. - 11.	Janka Urbánová	Z9	GAlejKE	32	9	9	-	9	-	-	0	68
	Alenka Bálintová	Z9	BGMHSuč	27	9	9	7	-	-	7	0	68
12.	Matúš Libák	S2	GAlejKE	26	9	7	-	7	-	7	0	63
13.	Ondrej Králik	S2	GAlejKE	14	9	9	7	9	0	1	0	56
14.	Lucia Kleščová	S2	GPoštKE	11	8	9	6	9	-	6	0	55
15.	Samuel Šandor	S1	GPoštKE	27	8	-	-	8	-	-	0	51
16.	Branislav Ječim	S3	GŠkolSN	25	8	-	7	-	-	9	0	49
17. - 18.	Martin Šmilňák	S3	GAlejKE	18	9	-	5	9	-	5	0	46
	Bianka Gurská	S3	GPoštKE	14	7	9	7	9	-	-	0	46
19. - 20.	Matúš Pokorný	S1	GAMČABA	39	-	0	-	6	-	-	0	45
	Eduard Fedorčuk	S3	EGJAKKE	27	9	-	-	9	-	-	0	45
21.	Veronika Vodičková	S2	GAlejKE	27	8	-	-	9	-	-	0	44
22.	Martina Osuská	Z9	ZDrJDMA	22	5	2	9	-	-	-	0	43
23. - 24.	Veronika Chovancová	S4	PiarGTN	36	-	-	-	-	-	-	0	36
	Alzbeta Klimentova	S3	GPoštKE	0	7	9	6	9	0	5	0	36
25.	Oskar Cacara	S1	GPoštKE	27	8	-	-	-	-	-	0	35
26.	Martin Dudjak	S1	SMládPP	27	7	-	-	-	-	-	0	34
27.	Katarína Farbulová	S2	GPoštKE	15	-	9	-	9	-	-	0	33
28. - 30.	Rudolf Kusý	S1	GAMČABA	30	-	-	-	-	-	-	0	30
	Martin Marcinčák	S3	Šrobárka	30	-	-	-	-	-	-	0	30
	Soňa Vasiľová	S2	GKukuPP	8	9	9	-	4	-	-	0	30
31.	Martin Mentel	Z9	BGMHSuč	22	1	1	3	-	0	-	0	28
32.	Matúš Sedlár	S3	GSMTŠPO	0	8	9	5	1	?	-	0	23
33.	Tomáš Sukeľ	S1	GAGLSHE	13	-	-	-	9	-	-	0	22
34.	Natália Poliačiková	S2	GPoštKE	18	-	-	-	-	-	-	0	18
35.	Maxima Anna Alžbeta Bednarčíková	S2	GAlejKE	16	-	-	-	-	-	-	0	16
36.	Nina Anna Betáková	S1	GAGLSHE	7	1	0	3	0	-	1	0	13
37.	Michal Almáši	S4	GPMláKE	12	-	-	-	-	-	-	0	12
38. - 39.	Michal Ferdinandy	Z9	GAlejKE	4	-	-	3	2	-	-	0	11
	Vladimír Slanina	S2	GPoštKE	11	-	-	-	-	-	-	0	11
40.	Terézia Stanová	S3	EGJAKKE	0	-	-	-	9	-	-	0	9
41.	Tomáš Boledovič	Z9	CZNarBA	5	-	3	-	-	-	-	0	8
42.	Sarah Klopstock	Z9	ŠpMNDaG	6	-	-	-	-	-	-	0	6
43. - 44.	Tomáš Lang	Z9	ZOKožSN	0	1	0	2	-	-	-	0	4
	Juraj Kramár	S2	GAlejKE	4	-	-	-	-	-	-	0	4
45. - 46.	Ladislav Jakab	S3	SOTBrKN	0	0	0	-	0	-	-	0	0
	Lucia Szabó	S2	GPJŠaRV	0	-	-	-	-	-	-	0	0

Názov: STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Máj 2023 • Letný semester 47. ročníka (2022/2023)
Web: `seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`
Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese `riesenia.strom@strom.sk`.

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: `zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.