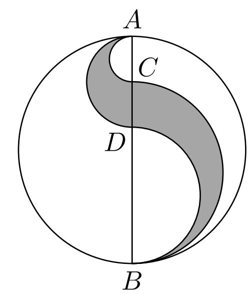
Košický matboj, 5. 5. 2006, 1. časť

1.1. Nájdite všetky reálne čísla x, pre ktoré platí $(x^2-4)^2(x+3)^2+(x+2)^2(x^2-9)^2=0$.

1.2. Janka sa vybrala do obchodu na nákup. Pri pokladni platila tisíckorunáčkou. Pokladničný bloček ukazoval sumu, ktorú mala zaplatiť a sumu, ktorú jej pokladníčka vrátila. Všimla si, že tieto dve rôzne čísla majú rovnaké cifry, ale v rôznom poradí. Aký bol súčet cifier sumy, ktorú Janka platila?

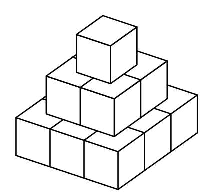
1.3. Vyšrafovaný obrázok je ohraničený polkružnicami, ktorých stredy ležia na priemere AB. Ďalej vieme, že platí $|AC|=|CD|=1/5$ a $|AB|=1$. Vypočítajte obsah vyšrafovanej plochy.



1.4. Mamka napiekla ríbezľový a jahodový koláč. Vieme, že ich nakrájala spolu na 58 kúskov. Počet možností, ako vybrať tri kúsky ríbezľového koláča, je rovnaký ako počet možností, ako vybrať dva kúsky jahodového a jeden kúsok ríbezľového koláča. Na koľko kúskov nakrájala mamka jahodový koláč?

1.5. Janko si vymyslel novú hru. Najprv si vybral dvojciferné číslo a vynásobil jeho cifry. Dostal tak nové číslo. Opäť vynásobil jeho cifry a takto pokračoval, až kým nedostal jednociferné číslo. Koľko je takých dvojciferných čísel, že ak s nimi Janko začne, dostane na konci číslo 0?

1.6. Pyramída na obrázku je zložená z troch poschodí kociek, z ktorých každá má objem 1 cm^3. Celkový povrch pyramídy je 42 cm^2. Rovnakým spôsobom sme postavili pyramídu, ktorej povrch bol 2352 cm^2. Z koľkých poschodí sa skladá?



1.7. V štvoruholníku $ABCD$ platí $|AB|=1$ cm, $|BC|=2$ cm, $|CD|=\sqrt{3}$ cm, $|\sphericalangle ABC|=120°$ a $|\sphericalangle BCD|=90°$. Zistite presnú dĺžku strany AD.

1.8. V galérii v jednom mestečku na západe Slovenska je cena rámu obrazu priamo úmerná cene samotnej maľby. Majiteľ sa rozhodol znížiť rozdiely medzi cenami obrazov tak, že vzájomne povymieňal rámy a samotné maľby dvoch párov obrazov. V prvom prípade, keď jeden obraz bol pôvodne 5-krát drahší ako druhý, je teraz jeho cena iba trikrát vyššia. Aký je pomer cien obrazov „Zimná rozprávka“ a „Krajinka“ po ich výmene, keď „Zimná rozprávka“ pôvodne stála 9-krát viac ako „Krajinka“?

1.9. Koľko čísel tvaru $\overline{ababab}$ je deliteľných 217?
Pozn.: Výraz $\overline{ababab}$ označuje šesťciferné číslo, ktorého cifry sú (zľava v tomto poradí) a, b, a, b, a, b.

1.10. Tri hrany štvorstena, vychádzajúce z jedného bodu, majú dĺžku 1 cm a každé dve z nich zvierajú uhol 45°. Vypočítajte objem štvorstena.

1.11. Pre reálne čísla x a y platí rovnosť $2x+3y=1$. Akú najväčšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $162xy^4+48x^4y$?

1.12. Poslanci v parlamente sedia vo štvorcovom rozmiestení 10×10. Každý poslanec má iný plat. Každý z nich pozná výšku platov poslancov, ktorí s ním susedia (vedľa neho, pred a za ním, aj po diagonále), tj. spolu 8 poslancov. Je spokojný, ak najviac jeden z nich má väčší plat ako on sám. Najviac koľko môže byť spokojných poslancov?

Košický matboj, 5. 5. 2006, 2. časť

2.1. Máme takúto reťaz čísel: 100 - 99 + 98 - 97 + $\cdots$ + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1). Pred ktoré číslo treba umiestniť ľavú zátvorku, aby hodnota reťaze bola 12?

2.2. Označenie strán knihy začína na piatej strane. Táto strana je označená číslom 5. V knihe sa nachádza ešte jedna strana, na ktorej nie je vytlačené číslo, pretože je na nej obrázok. Šikovný malý Feri spočítal, že súčet čísel všetkých strán knihy (vytlačených) je 2006. Koľko strán má kniha?

2.3. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel (x, y), pre ktoré platí, že aj čísla $\frac{x+1}{y}$ a $\frac{y+1}{x}$ sú prirodzené.

2.4. Zapíšte s presnosťou na dve desatinné miesta číslo

$$\sqrt[4012]{\frac{1}{2}(19-\sqrt{10})} \cdot \sqrt[2006]{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}.$$

2.5. V obdĺžniku $ABEF$ je strana BE trikrát dlhšia ako strana AB. Body C a D delia stranu BE na tri rovnaké časti. Aký je súčet uhlov BAC, BAD a BAE? Výsledok uveďte v stupňoch.

2.6. Predstavte si veľkú kocku $3 \times 3 \times 3$ poskladanú z 27 malých hracích kociek. Zoberieme z nej všetky rohové kocky. Dostaneme tak teleso, ktoré sa skladá z 19 kociek. Aký je najmenší možný počet bodiek, ktoré vidno na povrchu tohto telesa?
Pozn.: Hracia kocka má na jednotlivých stenách 1, 2, 3, 4, 5, 6 bodiek rozmiestnených tak, že súčty počtov bodiek na protiľahlých stenách sú rovnaké.

2.7. Kuiso sa v škole nudil a z dlhej chvíle sa hral s číslami. Na začiatku napísal na papier nejaké nanajvýš šesťciferné prirodzené číslo. Ďalšie číslo získal ako súčin alebo súčet cifier niektorého z čísel napísaných na papieri. Takto pokračoval, kým bolo možné pripisovať čísla, ktoré tam ešte nie sú. Keď už nebolo možné pripísať žiadne nové číslo, všimol si, že všetky čísla na papieri sú nepárne. Koľko rôznych čísel mohol napísať na začiatku?

2.8. Robot Tobor sa vie pohybovať iba priamočiaro (chodí vždy rovno dopredu). Ak má zmeniť smer, musíme ho vypnúť, otočiť a opäť zapnúť. Tobor stojí pri vonkajšej stene kruhovej chodby, ktorej šírka je rovnaká ako jej vnútorný polomer. Najmenej koľkokrát musí byť Tobor vypnutý, ak má prejsť pozdĺž celej tejto chodby tak, aby sa vrátil do bodu, v ktorom štartoval? (Rozmery robota sú zanedbateľné.)

2.9. Bod P leží vo vnútri štvorca $ABCD$ a platí: $|AP| = 1$, $|BP| = 2$ a $|CP| = 3$. Zistite vzdialenosť $|DP|$.

2.10. Pre niekoľko prvých členov $a_1, a_2, \ldots, a_k$ geometrickej postupnosti racionálnych čísel platí, že ich súčet je 11, súčet ich druhých mocnín je 341 a súčet ich tretích mocnín je 3641. Aké hodnoty môže nadobúdať a_3?

2.11. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať dve políčka na šachovnici 8×8 tak, že stred úsečky spájajúcej stredy týchto dvoch políčok je takisto stredom nejakého políčka? Políčka šachovnice sú očíslované, tj. šachovnicu neotáčame.

2.12. Bod F je stred strany BC v obĺžniku $ABCD$ a bod H delí stranu CD v pomere 1 : 2 (CH je kratšia časť). Aký najväčší môže byť uhol HAF?

Košický matboj, 5. 5. 2006, 3. časť

3.1. Na prvej truhličke bol takýto nápis: Táto truhlička skrýva v sebe učebnicu matematiky, alebo je v druhej truhličke mobil a playstation. Na druhej truhličke bol takýto nápis: Mobil a playstation sú v prvej truhličke. Ktorú truhličku si mám vybrať, ak chcem mobil a playstation a viem, že na truhličkách sú buď oba nápisy pravdivé alebo oba nepravdivé?

3.2. Najviac koľkokrát môže byť piatok trinásteho v jednom roku?

3.3. Majme trojuholník ABC. Rovnobežne so stranou a veďme priamku p, ktorá rozdelí trojuholník ABC na dve časti s rovnakým obsahom. Takisto veďme priamku q rovnobežnú so stranou b, ktorá rozdelí trojuholník ABC na dve časti s rovnakým obsahom. Aký bude obsah trojuholníka ohraničeného priamkami c, p a q?

3.4. Janka napísala na tabuľu prirodzené číslo. Potom napísala na tabuľu všetky čísla, ktoré mohla získať prehodením jeho číslic. Nakoniec sčítala všetky čísla, ktoré mala napísané na tabuli. Napr. ak na začiatku napísala číslo 110, získala súčet $110 + 101 + 11 = 222$. Nájdite najmenšie číslo, ktoré mohla Janka napísať na začiatku, aby dostala súčet čísel na tabuli rovný 2006.

3.5. Kužeľ a valec majú rovnaké výšky, objemy a obsahy plášťov. Vypočítajte vrcholový uhol kužeľa.

3.6. Ak celé kladné číslo k vydelíme prvočíslom p, dostaneme zvyšok 6. Ak delíme prvočíslom p číslo $1000 - k$, zvyšok je opäť 6. Okrem toho vieme, že číslo $10000 - k$ je deliteľné p. Aká je hodnota prvočísla p?

3.7. Katka si napísala na 32 kartičiek nejaké prirodzené čísla. Tomáš môže ukázať na 7 kartičiek a Katka mu povie, či je súčet čísel na nich párny alebo nepárny. Koľko najmenej pokusov potrebuje Tomáš, aby určil, či je súčet všetkých 32 čísel párny alebo nepárny?

3.8. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel (a, b), pre ktoré platí

$$90 < a + b < 100 \qquad \text{a} \qquad 0,9 < \frac{a}{b} < 0,91.$$

3.9. Na toaletnom papieri bolo napísaných 408 písmeniek: *abcabc....abc*. Najviac na koľko navzájom rôznych kúskov sa dá pás nastrihať (t.j. „slová“ na žiadnych dvoch kúskoch nemôžu byť rovnaké)?

3.10. Nájdite všetky reálne riešenia rovnice

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor = x.$$

Pozn.: Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo menšie alebo rovné x.

3.11. Obraz, ktorý visí na stene galérie, má výšku 3 metre. Jeho spodný okraj je 1 meter nad úrovňou očí pozorovateľa. Ako ďaleko (v metroch) musíme stáť od obrazu, aby sme ho (jeho dolný a horný okraj) videli pod najväčším uhlom?

3.12. V trojuholníku ABC platí: $|AC| = 1, |\sphericalangle ABC| = 30°, |\sphericalangle BAC| = 60°$. Označme D pätu výšky na stranu AB. Zistite vzdialenosť stredov kružníc vpísaných do trojuholníkov ACD a BCD.

Riešenia

1.1 $x \in \{-2, -3\}$

1.2 14

1.3 $\frac{\pi}{20}$

1.4 21 kúskov

1.5 24

1.6 24 poschodí

1.7 $\sqrt{7}$ cm

1.8 „Zimná rozprávka“ je 4× drahší ako „Krajinka“

1.9 3 čísla $(313131, 626262, 939393)$

1.10 $\frac{1}{12}(2-\sqrt{2})\sqrt{1+\sqrt{2}}$

1.11 $\frac{1}{12}$

1.12 50 poslancov

3.1 prvú truhličku

3.2 trikrát

3.3 $(3-2\sqrt{2})S_{ABC}$

3.4 takéto číslo neexistuje

3.5 $60°$

3.6 $p = 19$

3.7 najmenej 6 pokusov

3.8 $(47, 52)(46, 51)$

3.9 48

3.10 $x \in \{0, -2, -3, -5\}$

3.11 2 m

3.12 $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$

2.1 pred číslo 39

2.2 64 strán (64. strana nie je očíslovaná)

2.3 $(3, 2), (2, 3), (1, 1), (1, 2), (2, 1)$

2.4 1

2.5 $180°$

2.6 126

2.7 $5 + 13 + 21 = 39$ čísel

2.8 dvakrát

2.9 $\sqrt{6}$

2.10 4

2.11 480

2.12 $30°$

Košický matboj, 5. 5. 2006, riešenia 1. časti

Škola .... **Družstvo** .... **Číslo družstva** ....

Za správnu odpoveď sú 2 body, za nesprávnu -1 bod, za neodpovedanie 0 bodov.

1.1. ....

1.2. ....

1.3. ....

1.4. ....

1.5. ....

1.6. ....

1.7. ....

1.8. ....

1.9. ....

1.10. ....

1.11. ....

1.12. ....

Príklady .... **Opravoval** ....

Košický matboj, 5. 5. 2006, riešenia 2. časti

Škola .... **Družstvo** .... **Číslo družstva** ....

Za správnu odpoveď sú 2 body, za nesprávnu -1 bod, za neodpovedanie 0 bodov.

2.1. ....

2.2. ....

2.3. ....

2.4. ....

2.5. ....

2.6. ....

2.7. ....

2.8. ....

2.9. ....

2.10. ....

2.11. ....

2.12. ....

Príklady .... **Opravoval** ....

Košický matboj, 5. 5. 2006, riešenia 3. časti

Škola .... **Družstvo** .... **Číslo družstva** ....

Za správnu odpoveď sú 2 body, za nesprávnu -1 bod, za neodpovedanie 0 bodov.

3.1. ....

3.2. ....

3.3. ....

3.4. ....

3.5. ....

3.6. ....

3.7. ....

3.8. ....

3.9. ....

3.10. ....

3.11. ....

3.12. ....

Príklady .... **Opravoval** ....