



# Košický Matboj

Košice 24. 10. 2014

1.1. Koľko najviac vieme vybrať rôznych prirodzených čísel menších ako 47, že najväčší spoločný deliteľ každých dvoch z nich je 1?

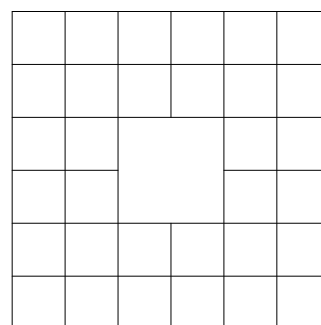
1.2. Turnaja v piškvorkách sa zúčastnilo 21 účastníkov tábora. Každý s každým hral práve raz, víťaz získal 1 bod, porazený žiadny, remíza nenastala. Po odohraní všetkých zápasov vytvorili body ľudí aritmetickú postupnosť. Koľko bodov získal víťaz turnaja (t.j. hráč s najväčším počtom získaných bodov)? Uveďte všetky možnosti.

Pozn.: V aritmetickej postupnosti je rozdiel po sebe idúcich členov rovnaký.

1.3. Číslo 5 je možné zapísať pomocou piatich jednotiek napríklad takto:  $(11 - 1)/(1 + 1) = 5$ . Napište číslo 7 pomocou siedmich dvojiek. Používať môžete zátvorky a operácie plus, mínus, krát, delene.

1.4. Pán a pani Zajacovi žijúci v Anglicku chcú nazvať svoje dieťa tak, aby jeho meno bolo monogram. To znamená, že iniciálky jeho prvého, stredného mena a priezviská sú v abecednom poradí miestnej abecedy a neopakujú sa. Koľko takých rôznych monogramov existuje?

1.5. Určte počet obdĺžnikov (vrátane štvorcov) na obrázku.



1.6. Vo vrecúšku je 50 guľôčok.

Na to aby som mal istotu, že budem mať aspoň 1 zelenú guľôčku musím z neho vytiahnuť aspoň 28 guľôčok.

Na to aby som mal istotu, že budem mať aspoň 2 modré guľôčky musím z neho vytiahnuť aspoň 36 guľôčok.

Na to aby som mal istotu, že budem mať aspoň 3 žlté guľôčky musím z neho vytiahnuť aspoň 42 guľôčok.

Koľko je vo vrecúšku červených guľôčok?

1.7. A store sells 11 different flavors of ice cream. In how many ways can a customer choose 6 ice cream cones, not necessarily of different flavors? Each ice cream cone contains single ice cream flavor.

1.8. Do rovnostranného trojuholníka  $ABC$  je vpísaný kruh  $k$ . Ďalší kruh  $l$  sa dotýka strán  $AB$ ,  $AC$  a kruhu  $k$  zvonku. Obsah kruhu  $l$  je  $\pi$ . Vypočítajte obsah trojuholníka  $ABC$ .

1.9. Peťo pri obede zahlásil: Nájdite najväčšie číslo  $n$  také, že  $2^n$  delí  $7^{32} - 1$ .

1.10. V danom rovnobežníku  $ABCD$  je bod  $E$  stred strany  $BC$  a bod  $F$  leží vo vnútri strany  $AB$ . Obsah trojuholníka  $AFD$  je 15 a obsah trojuholníka  $FBE$  je 14. Určte obsah štvoruholníka  $FECD$ .

1.11. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel  $(a,b)$  také, že  $ab + a + 7b = 2014$

1.12. Vyčísľte výraz  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 2013^2 - 2014^2$

---

**Výsledky:** 1.1. 15 1.2. 20 1.3. napríklad  $(22 - 2 - 2 - 2 - 2)/2$  1.4.  $\binom{25}{2} = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$  1.5. 297 1.6. 0 1.7.  $\binom{16}{10} = 8008$  1.8.  $27\sqrt{3}$  1.9. 8 1.10. 57 1.11.  $(36,46)$  a  $(40,42)$  1.12.  $-\frac{2015 \cdot 2014}{2}$

---

2.1. Nájdite obsah najmenšieho štvorca obsahujúceho body  $(2, -1)$  a  $(4,4)$ .

2.2. Pravidelný osemsten  $ABCDEFGF$  o strane 3 je tvorený štvorbokými ihlanmi  $ABCDE$  a  $ABCDF$ . Určte obsah štvoruholníka  $E AFC$ .

2.3. Myslím si 3 rôzne prirodzené čísla. Keby som ti povedal ich súčin, vedel by si, že ich súčet je 100. Aký je ich súčin?

**2.4.** Uvažujme všetky pravouhlé trojuholníky s celočíselnými dĺžkami strán (v cm), ktorých dĺžky strán tvoria aritmetickú postupnosť. Nech  $M$  je množina všetkých obvodov týchto trojuholníkov. Aký je 2014-ty najmenší prvok  $M$ ?

**2.5.** V rovine sú dané tri body, ktoré neležia na priamke. Koľko existuje priamok, ktoré sú rovnako vzdialené od každého bodu?

**2.6.** Šachový kôň stojí v rohu šachovnice  $9 \times 9$ . Do protiľahlého rohu sa vie dostať na 6 skokov. (hýbe sa normálne teda 2 políčka jedným smerom a 1 smerom na to kolmým). Koľkými spôsobmi to vie urobiť?

**2.7.** Úsečka  $AB$  dĺžky 1 rozdeľuje obsah kružnice  $k$  s polomerom 1 na dve časti. Aký je obsah väčšej časti, ak viete, že body  $A, B$  ležia na kružnici  $k$ ?

**2.8.** Zistite, pre koľko celých čísel  $p$  má sústava rovníc

$$\begin{aligned}x^2y - 2x &= p \\ y^2x - 2y &= 2p - p^2\end{aligned}$$

práve tri riešenia v obore reálnych čísel.

**2.9.** Kocka  $11 \times 11 \times 11$  je zlepená z  $11^3$  malých kociek. Potom je rozdelená 12 rovinnými rezmi a to takými, že 4 sú rovnobežné s jednou stenou 4 s druhou a 4 s tretou stenou kocky na 125 častí. Žiaden z rezov však nerozdeľuje žiadnu malú kocku. Najviac koľko z tých 125 častí môže byť rôznych?

**2.10.** Nájdite najväčšie prirodzené číslo  $n$  také, aby číslo  $(2014!)!$  bolo deliteľné číslom  $(n!)!$ .

**2.11.** Matúš vedel, že čísla  $a, b$  spĺňajú rovnosti

$$\begin{aligned}a + \frac{1}{b} &= 7 \\ b + \frac{1}{a} &= 5\end{aligned}$$

Chce sa predviesť, že rýchlo povie hodnotu  $ab + \frac{1}{ab}$ . Koľko mu vyjde?

**2.12.** Nech  $P$  je polynóm 8. stupňa tvaru  $P(x) = a_8x^8 + a_7x^7 + \dots + a_1x + a_0$ , pri čom platí, že  $P(x) = 1/x$  pre  $x = 1, 2, \dots, 9$ . Vypočítajte  $P(10)$ .

---

**Výsledky:** 2.1.  $29/2$  2.2. 9 2.3. 194 2.4. 24168 2.5. 3 2.6. 40 2.7.  $\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$  2.8. 2 a to 0 a 1 2.9. 30 2.10. 6 2.11. 33 2.12.  $1/5$

---

**3.1.** Z kartičiek, na ktorých sú čísla: 2; 2; 5; 2; 3; 4; 5; 8; 9, zlož najväčšie osemciferné číslo deliteľné dvanástimi.

**3.2.** Aké sú posledné tri cifry čísla  $2^{30}$

**3.3.** Ktorému celému číslu je rovný súčin

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \cdot \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} \cdot \dots \cdot \frac{\frac{1}{98} - \frac{1}{99}}{\frac{1}{99} - \frac{1}{100}} ?$$

**3.4.** Z niekoľkých zhodných kociek sme zlepiť teleso, pričom sme kocky vždy prikladali len celou stenou k sebe. Keď sa na neho pozrieme spredu vidíme 7 štvorcov (stien kociek), ak zľava tak 18. Koľko najviac a koľko najmenej štvorcov môžeme vidieť ak sa na teleso pozrieme zhora? Odpoveď uveďte ako rozdiel týchto dvoch čísel.

3.5. Majme trojuholník  $ABC$  s celočíselnými dĺžkami strán. Bod  $D$  leží na strane  $AC$  tak, že  $BD$  je osou uhla  $ABC$ ,  $|AD| = 4$  a  $|DC| = 6$ . Zistite aký najmenší obvod môže mať trojuholník  $ABC$ .

3.6. Terka sa rozhodla zapísať číslo 1259 ako súčet 2 druhých mocnín. Koľkými spôsobmi sa to dá?

3.7. Žabka skáče v rovine z bodu  $(0,0)$  do bodu  $(8,8)$ . Z bodu  $(x,y)$  vie vždy skočiť len do bodu  $(x+1,y)$  alebo  $(x,y+1)$ . Navyše, od rodičov má zákaz skočiť na akýkoľvek bod  $(x,y)$ , kde platí  $|x-y| > 1$ . Koľkými spôsobmi sa môže dostať do bodu  $(8,8)$ , tak aby neporušila zákaz?

3.8. Rovnoramenný trojuholník má základňu dlhú 16 cm a ramená dlhé 17 cm. Existuje ešte jeden odlišný trojuholník, ktorý má ramená dlhé 17 cm a rovnaký obsah ako predchádzajúci. Akú dlhú má základňu?

3.9. What is the largest positive integer  $n$  for which  $n^3 + 100$  is divisible by  $n + 10$ ?

3.10. Daný je trojuholník  $ABC$  s obsahom 1. Na jeho stranách  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  ležia body  $D$ ,  $E$ ,  $F$  tak, že platí

$$BD : CD = CE : AE = AF : BF = 1 : 3.$$

Aký je obsah trojuholníka ohrančeného priamkami  $AD$ ,  $BE$  a  $CF$ ?

3.11. Štvorsten  $ABCD$  má dĺžky hrán  $AB = BC = AC = 10$ .  $DB = DC = DA = 7$ . Aký je polomer najmenšej gule do ktorej sa zmestí celý štvorsten?

3.12. Máme prirodzené čísla od 1 do 13. Vytvárame množiny, v ktorých súčet najmenšieho a najväčšieho prvku je 14. Koľko takých množín je možné z takýchto čísel vytvoriť?

---

**Výsledky:** 3.1. 98552232 3.2. 824 3.3. 50 3.4.  $126 - 3 = 123$  3.5. 25 3.6. 0 3.7.  $2^8 = 256$ , v  $(a,a)$  má 2 na výber a ďalší povinný do  $(a+1, a+1)$  3.8. 30 3.9. 890 3.10.  $4/13$  3.11.  $10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$  3.12. 2731

---



<http://www.strom.sk>  
<http://seminar.strom.sk>  
<http://seminar.strom.sk/matboj>



<http://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta>  
<http://skoly.science.upjs.sk>  
<http://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta/informacie-pre-zaujemcov-o-studium>

Projekt podporila Nadácia pre deti Slovenska z fondu Hodina deťom



NADÁCIA PRE  SLOVENSKA  
CHILDREN OF SLOVAKIA FOUNDATION