Košický Matboj

Košice 27. 10. 2017

1. časť

Úloha 1.1: Kubo má 26 kamarátov, ktorí riešili seminár STROM, a 17 takých, ktorí riešili seminár KMS. 11 jeho kamarátov nikdy žiadny seminár neriešilo. Ak má Kubo 42 kamarátov, koľko z nich riešilo STROM aj KMS?

Výsledok: 12

Riešenie: Keďže 11 kamarátov neriešilo žiaden seminár, bude nás zaujímať iba zvyšných $42 - 11 = 31$ kamarátov. Ak 26 z nich riešilo STROM (niektorí z nich aj KMS), tak $31 - 26 = 5$ riešilo iba KMS. To znamená, že oba semináre riešilo $17 - 5 = 12$ kamarátov.

Úloha 1.2: Nájdite všetky usporiadané dvojice prvočísel (p, q) také, že spĺňajú $p^q + pq = 323$.

Výsledok: $(17, 2)$

Riešenie: Všetky prvočísla väčšie ako 2 sú nepárne. V prípade, že p aj q je nepárne prvočíslo, tak p^q je nepárne číslo a pq je tiež nepárne číslo. Súčet $p^q + pq$ je preto číslo párne, a teda nie 323, čo je spor. Z toho vyplýva, že buď $p = 2$ alebo $q = 2$. Keď $p = 2$, tak ľavá strana rovnice je párna (pretože oba členy sú deliteľné 2), teda nie 323. Preto nutne $q = 2$ a ďalej len riešime rovnicu:

$$\begin{aligned} p^2 + 2p &= 323, \\ p^2 + 2p + 1 &= 323 + 1, \\ (p + 1)^2 &= 324, \\ |p + 1| &= 18. \end{aligned}$$

Keďže $p+1$ je kladné číslo, tak $p+1 = 18$, teda $p = 17$. Existuje len jedna dvojica prvočísel (p, q), a to $(17, 2)$.

Úloha 1.3: V miestnosti je 7 ľudí. Štyria z nich poznajú práve jedného iného človeka v miestnosti a traja z nich poznajú práve dvoch. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne zvolení dvaja ľudia sa nepoznajú? Výsledok zadajte ako zlomok v základnom tvare. Poznámka: známosť je vzájomná.

Výsledok: 16/21

Riešenie: Najprv si musíme uvedomiť, že známosť je vzájomná. To znamená, že ak Adam pozná Betku, tak aj Betka Adama, a zároveň takúto známosť rátame ako jednu, nie ako dve. V miestnosti je preto

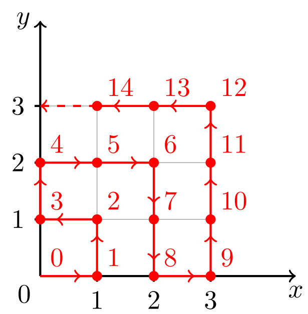
$$\frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{2} = 5$$

dvojíc ľudí, ktorí sa navzájom poznajú. Celkový počet dvojíc je ale $\binom{7}{2} = 21$. Keďže 5 dvojíc z 21 sa navzájom pozná, tak dvojíc, kde sa ľudia nepoznajú je $21 - 5 = 16$. Výsledná pravdepodobnosť je preto 16/21.

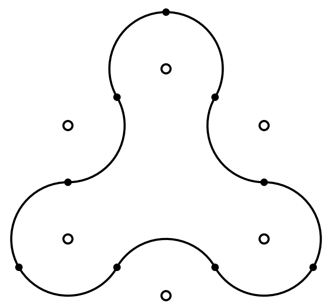
Úloha 1.4: Častica sa pohybuje v súradnicovom systéme, ako je znázornené na obrázku. Za minútu prejde vždy vzdialenosť dĺžky 1. V ktorom bode sa bude nachádzať po 2017 minútach?

Výsledok: $[44, 7]$

Riešenie: Častica postupne prechádza všetky body v súradnicovom systéme. Vidíme, že vždy, keď „narazí" na jednu z osí, tak uzatvára štvorec bodov, ktoré prešla. Čas potrebný na prejdenie všetkých bodov štvorca so stranou n je $(n + 1)^2 - 1$, keďže v bode $[0, 0]$ bola v čase 0. Navyše, ak n je párne, častica narazila na x-ovú os, zatiaľ čo pre nepárne n častica narazila na y-ovú os. Po chvíľke skúšania zistíme, že najbližšie druhé mocniny okolo 2017 sú $44^2 = 1936$ a $45^2 = 2025$. Nakoľko 2025 je bližšie, tak pôjdeme od tohto bodu a budeme sa vracať v čase. Po 2024 minútach častica prešla všetky body v štvorci so stranou 44 a skončila v bode $[44, 0]$. Preto sedem minút skôr, v čase 2017, sa častica nachádzala v bode $[44, 7]$.

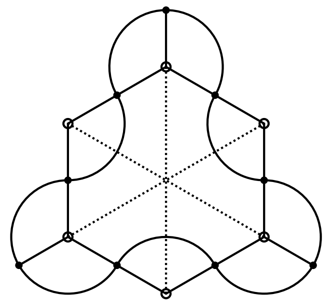


Úloha 1.5: The closed curve in the figure is made of 9 congruent circular arcs each of length $2\pi/3$, where each of the centers of the corresponding circles is among the vertices of a regular hexagon of side 2. What is the area enclosed by the curve?



Výsledok: $\pi + 6\sqrt{3}$

Riešenie: Úlohou je spočítať obsah útvaru, ktorý je ohraničený krivkou. Krivku tvorí 9 kružnicových oblúkov, pričom každý má dĺžku $2\pi/3$ a stredy príslušných kružníc tvoria pravidelný šesťuholník so stranou dĺžky 2 (body, ktoré nie sú plné).
Najprv si uvedomme, že každý kružnicový oblúk je časťou kružnice, ktorá má polomer 1, a teda oblúk prislúcha tretine plného uhlu (t.j. prislúcha $120°$, pretože celá kružnica má obvod 2π). Dokreslime si pár úsečiek (tie, čo sú plné) tak, ako na obrázku. Potom vidíme, že hľadaný obsah útvaru je obsah šesťuholníka (určeného neplnými bodmi) zmenšený o tri kruhové výseky v súčte s obsahom šiestich kruhových výsekov. Je to teda obsah šesťuholníka v súčte s jedným obsahom kruhu (tromi kruhovými výsekmi, pričom sú všetky zhodné a prislúchajú uhlu $120°$ každý). Obsah kruhu je jasne $\pi \cdot 1^2 = \pi$. Ostáva si uvedomiť, že pravidelný šesťuholník vieme rozdeliť na šesť zhodných rovnostranných trojuholníkov (čiarkovaná čiara na obrázku) so stranou 2, teda obsah celého šesťuholníka bude $6 \cdot (1/2) \cdot 2^2 \cdot \sin(60°) = 6 \cdot (1/2) \cdot 2^2 \cdot (\sqrt{3}/2) = 6\sqrt{3}$. Krivka z oblúkov ohraničuje plochu s obsahom $\pi + 6\sqrt{3}$.



Úloha 1.6: Majme jedenásťboký ihlan, ktorý má na každej stene (aj podstave) nejaké číslo. Súčet všetkých týchto čísel je 60. Každému vrcholu je priradené číslo, ktoré je rovné súčtu čísel na stenách, ktoré tento vrchol obsahujú. Navyše majú všetky vrcholy priradené rovnaké číslo. Aké?

Výsledok: 33

Riešenie: Jedenásťboký ihlan je tvorený podstavou v tvare jedenásťuholníka a jedenástimi trojuholníkovými bočnými stenami. Každému vrcholu je priradené rovnaké číslo, ktoré je súčtom čísel na stenách, ktoré tento vrchol obsahujú. Toto číslo vo vrcholoch si označíme X.
Keďže máme v ihlane vrchol, ktorý je obsiahnutý práve v jeho jedenástich bočných stenách, tak vieme, že súčet všetkých čísel napísaných na týchto bočných stenách je X. Číslo napísané na podstave si označíme Y. Podľa zadania je súčet všetkých napísaných čísel na stenách ihlanu 60, a teda $X + Y = 60$.
Keď sa pozrieme na súčet čísel priradených všetkým vrcholom podstavy, čiže $11X$, tak si ho vieme vyjadriť aj ako $11Y + 2X$, pretože v tomto súčte je podstava zahrnutá 11-krát, keďže každý z vrcholov je v nej obsiahnutý a zároveň číslo z každej z bočných stien bolo zahrnuté do práve dvoch vrcholov podstavy.
Po dosadení $Y = 60 - X$ do rovnice $11X = 11Y + 2X$ dostávame $9X = 11(60 - X)$, odkiaľ $X = 33$.

Úloha 1.7: Majme pevnú šachovnicu rozmerov 3×3. Koľko trojuholníkov určujú jej mrežové body? Výsledok uveďte ako jedno prirodzené číslo.

Výsledok: 516

Riešenie: Každý trojuholník je určený trojicou nekolineárnych bodov (to sú také body, ktoré neležia na jednej priamke) a zároveň každá taká trojica bodov určuje trojuholník. V mriežke 3×3 máme $4 \cdot 4 = 16$ mrežových bodov, a teda

$$\binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$$

rôznych trojíc bodov. Nie každá trojica ale automaticky určuje trojuholník. Od tohto počtu musíme ešte odčítať trojice kolineárnych bodov (lebo tie určujú len úsečku). V jednom „riadku“ bodov máme jasne $\binom{4}{3} = 4$ trojice kolineárnych bodov. Riadkov pritom máme formálne 8 (4 v jednej a 4 v druhej osi mriežky). Ostáva zarátať trojice ležiace na uhlopriečkach. Na každej z oboch hlavných diagonál je trojíc spolu $\binom{4}{3} = 4$ a na uhlopriečkach nad, resp. pod ňou sú spolu dve takéto trojice (v každej z oboch orientácií). Spolu tak máme $560 - 8 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 516$ trojíc nekolineárnych bodov, a teda počet hľadaných trojuholníkov je 516.

Úloha 1.8: Majme škatuľu so 100 čiernymi a 100 bielymi guľôčkami. Vždy z nej vyberieme 3 guľôčky a niektoré vrátime podľa nasledujúcich pravidiel (zvyšné vybrané guľôčky do škatule nevraciame):

1. Ak vytiahneme 3 čierne, vrátime 2 čierne.
2. Ak vytiahneme 2 čierne a 1 bielu, vrátime 1 čiernu a 1 bielu.
3. Ak vytiahneme 1 čiernu a 2 biele, vrátime 2 biele.
4. Ak vytiahneme 3 biele, vrátime 1 čiernu a 1 bielu.

Aké guľôčky môžeme mať na konci?

Výsledok: 2 biele guľôčky

Riešenie: Naša hra končí vtedy, ak už nemôžeme spraviť žiaden ťah. Vždy, ak máme aspoň 3 guľôčky, tak vieme spraviť ťah a zároveň v každom ťahu sa počet guľôčok zmenší o jednu. Vidíme, že v žiadnom ťahu sa parita bielych guľôčok nemení, teda ak sme zobrali nepárny počet bielych, tak sme ich nepárny počet aj vrátili, ak sme zobrali párny, tak sme vrátili párny. Zároveň neexistuje ťah, v ktorom by sme sa mohli zbaviť všetkých bielych guľôčok, ktoré máme.
Na konci musíme dôjsť do bodu, keď nám zostanú len dve guľôčky. Vieme, že aspoň jedna z nich musí byť biela, keďže tých sa nevieme zbaviť úplne. Zároveň bielych musí ostať párny počet, lebo aj na začiatku ich bol párny počet. Preto po poslednom ťahu v škatuli zostanú 2 biele guľôčky.

Úloha 1.9: Je daný štvoruholník $ABCD$ taký, že jeho uhlopriečky sú osami jeho vnútorných uhlov. Určte jeho obsah, ak viete, že jedna strana a jedna z jeho uhlopriečok majú zhodnú dĺžku 2.

Výsledok: $2\sqrt{3}$

Riešenie: Bez ujmy na všeobecnosti nech $|AB| = |BD| = 2$ (rozmyslite si, prečo vieme zvoliť uhlopriečku a stranu s danou dĺžkou ľubovoľne). Trojuholník ABD je potom rovnoramenný, a teda $|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle BAD| = \alpha$ (a tiež $|\sphericalangle BDC| = \alpha$, pretože BD je osou uhla ADC). Uhlopriečka AC tvorí os uhla DAB, takže $|\sphericalangle CAB| = \alpha/2$. Doplňme ešte veľkosti uhlov: $|\sphericalangle DBA| = 180° - 2\alpha \implies |\sphericalangle DBC| = 180° - 2\alpha$, pričom využívame súčet vnútorných uhlov v ABD a fakt, že BD je osou uhla ABC. Nakoľko súčet vnútorných uhlov v celom štvoruholníku je $360°$, tak $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACD| = \alpha/2$ (využívame, že AC delí uhol DCB na polovice).
Všimnime si teraz, že pre súčet vnútorných uhlov v trojuholníku ACB platí: $180° = 2\cdot(180°-2\alpha)+2\cdot(\alpha/2) \implies \alpha = 60°$. Uvedomme si ešte, že trojuholníky ABD a CBD sú zhodné podľa vety *usu*. Hľadaný obsah potom vieme vyjadriť napr. ako: $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 2 \cdot (1/2) \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \sin(|\sphericalangle ABD|) = 2^2 \cdot \sin(60°) = 2\sqrt{3}$.

Úloha 1.10: Nech $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Zistite hodnotu súčtu: $f(1) + f(2) + \cdots + f(2017)$.

Výsledok: $\sqrt{2018} - 1$

Riešenie: Usmerníme zlomok (prenásobíme jednotkou vo vhodnom tvare) $f(n)$, aby sme sa zbavili odmocnín v menovateli:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Súčet zo zadania potom vieme prepísať ako:

$$(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{2018}-\sqrt{2017}) = -\sqrt{1} + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{2018}.$$

Po vhodnom zoradení a „vynulovaní členov“ nám ostane: $\sqrt{2018} - 1$.

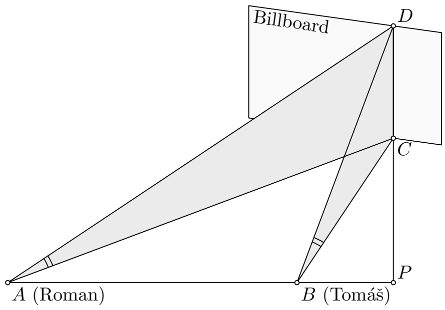
Úloha 1.11: Máme 5 letísk. Pre každé dve letiská A, B platí, že buď existuje pravidelné letecké spojenie z A do B alebo z B do A, nie však obidve zároveň. Navyše ešte platí, že existuje jedno letisko, z ktorého sa dá vyraziť a po čase sa doňho nejako vrátiť späť. Koľko je možností, ako môžu byť pravidelné linky medzi letiskami rozvrhnuté?

Výsledok: 904

Riešenie: Najprv vynechajme podmienku o tom, že má existovať letisko, z ktorého vieme vyjsť a vrátiť sa do neho. Potom máme $10 = \binom{5}{2}$ dvojíc miest a medzi každou z nich máme dve možnosti, ktorým smerom dáme let. Preto je dokopy $2^{10} = 1024$ možností ako rozvrhnúť linky.
Od týchto možností však musíme odčítať tie, pri ktorých nebude existovať okružná jazda. Ako môžu byť lety rozvrhnuté, aby neexistovala? No zjavne tam musí byť mesto, z ktorého nevychádza žiadna linka, inak by sme mohli stále cestovať ďalej, až by sme sa dostali do mesta, kde sme už boli. Keď toto mesto odstránime, tak zjavne zase zo zvyšných 4 miest musí existovať mesto, z ktorého teraz nevychádza žiadna linka, atď. V konečnom

dôsledku zistíme, že to musí vyzerať tak, že nejak očíslujeme mestá od 1 do 5 a linka pôjde vždy z mesta s vyšším číslom do mesta s nižším číslom.
Koľko máme možností ako takto očíslovať mestá? No zjavne $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$. Preto celkový počet možností ako rozvrhnúť linky podľa podmienok je $1024 - 120 = 904$.

<u>Úloha 1.12:</u> Roman a Tomáš sa pozerajú na billboard. Roman stojí na bode A vo vzdialenosti 40 m od steny, na ktorej sa billboard nachádza, zatiaľ čo Tomáš stojí na bode B vo vzdialenosti 10 m od steny. Z oboch bodov vidno billboard pod rovnakým uhlom; uhol CAD je rovnaký ako uhol CBD, kde C je bod na spodnom okraji billboardu a D je bod na vrchnom okraji billboardu a navyše body A, B, C a D ležia v rovine kolmej na zem. Zistite, v akej výške je zavesený billboard (vzdialenosť bodov P a C), ak výška billboardu je 5 m.



Výsledok: $(\sqrt{1625} - 5)/2\,\mathrm{m}$

Riešenie: Body A a B, na ktorých stoja Roman a Tomáš, sa nachádzajú v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku CD a navyše úsečku CD vidno z bodov A a B pod rovnakým uhlom. Štvoruholník $ABCD$ je preto tetivový. Súčet protiľahlých uhlov v tetivovom štvoruholníku je 180°, a preto

$$|\sphericalangle DAB| = 180^\circ - |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle BCP|.$$

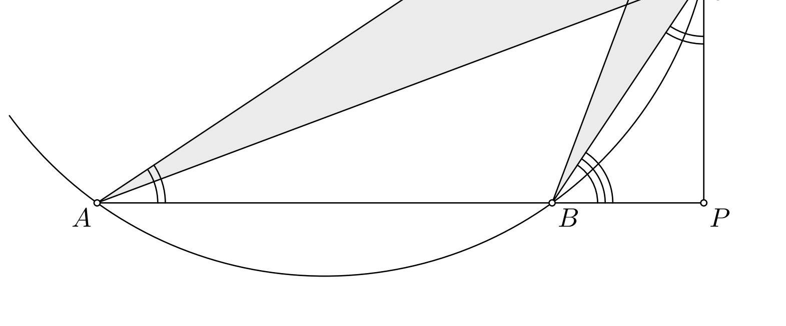
Rovnakým spôsobom vieme dostať, že

$$|\sphericalangle ADC| = 180^\circ - |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CBP|.$$

Preto trojuholníky APD a CPB sú podobné podľa vety *uuu*. Z podobnosti trojuholníkov dostávame

$$\begin{aligned} \frac{|AP|}{|CP|} &= \frac{|CP| + |CD|}{|BP|} \\ |CP|^2 + 5|CP| &= 400 \\ |CP| &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 1600}}{2}. \end{aligned}$$

Vzdialenosť bodov C a P je kladné číslo a preto nás zaujíma len kladné riešenie predchádzajúcej kvadratickej rovnice. Teda billboard sa nachádza vo výške $(\sqrt{1625} - 5)/2\,\mathrm{m}$.



2. časť

<u>**Úloha 2.1:**</u> Pokladníčka v múzeu predáva ľuďom vstupenky s číslom podľa toho, koľkí v poradí v ten deň prišli (prvý návštevník dostane vstupenku s číslom 1, druhý s číslom 2, atď.). Počas dňa sa minul žltý papier, na ktorý vstupenky tlačila, a preto začala používať modrý. Večer zistila, že predala rovnako veľa žltých vstupeniek ako modrých, no súčet čísel na modrých vstupenkách bol o 49 väčší. Koľko vstupeniek v ten deň predala?

Výsledok: 14

Riešenie: Označme si počet predaných žltých (resp. modrých) vstupeniek ako n. Rovnako potom najvyššia predaná žltá vstupenka mala poradové číslo n. Modré vstupenky preto boli číslované číslami $n+1$, $n+2, \ldots$ Keďže modré vstupenky mali posunuté číslovanie o n, pri každej predanej modrej vstupenke sa súčet čísel na modrých vstupenkách zvýšil o n viac, než sa pri príslušnej žltej vstupenke zvýšil súčet na žltých. Modrých vstupeniek bolo predaných tiež n, preto sa súčet na modrých vstupenkách zvýšil oproti žltým n-krát o n. Rozdiel medzi súčtami preto spĺňa $49 = n^2$. Preto $n = 7$ a počet predaných vstupeniek bol $7 + 7 = 14$.

<u>**Úloha 2.2:**</u> Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré je každá číslica čísla $12n$ 0 alebo 7.

Výsledok: 6475

Riešenie: Číslo $12n$ musí byť deliteľné číslami 3 a 4. Z deliteľnosti číslom 4 plynie, že jeho posledná cifra musí byť 0 a predposledná tiež 0, pretože číslo 70 nie je deliteľné číslom 4. Vďaka deliteľnosti číslom 3 vieme, že číslo $12n$ musí obsahovať aspoň tri cifry 7, aby jeho ciferný súčet bol deliteľný 3. To znamená, že najmenšie číslo $12n$, ktoré spĺňa podmienky zo zadania, je 77700. Hľadané n je teda $77700/12 = 6475$.

<u>**Úloha 2.3:**</u> Nájdite štvorciferné číslo, ktorého všetky cifry sú navzájom rôzne a keď toto číslo trikrát vydelíme jeho ciferným súčtom, dostaneme opäť jeho ciferný súčet.

Výsledok: 2401

Riešenie: Podľa zadania chceme nájsť štvorciferné číslo $x = \overline{abcd}$, ktoré má všetky cifry rôzne a ciferný súčet $s = a + b + c + d$, pre ktorý platí $x = s^4$. Vieme, že $5^4 < \overline{abcd} < 10^4$, pretože hľadáme 4-ciferné číslo a 5^4 je 3-ciferné a 10^4 je 5-ciferné. Preto nám zostali možnosti pre s rovné 6, 7, 8 a 9. Rýchlo vidíme, že 6^4 aj 8^4 končia na cifru 6, preto ak cifry sú rôzne, tak budú mať ciferný súčet príliš veľký ($6^4 = 1296 \longrightarrow 1+2+9+6 = 18 > 10$, $8^4 = 4096 \longrightarrow 4+9+6 = 19 > 10$). Vyskúšaním zvyšných dvoch možností zistíme, že vyhovuje len $x = 7^4 = 2401$ (nakoľko $9^4 = 6561$ má veľký ciferný súčet).

<u>**Úloha 2.4:**</u> V senáte zasadá 100 senátorov, po dvoch z každého z päťdesiatich republikových štátov. Koľkými spôsobmi vieme vybrať štvorčlenný výbor tak, aby v ňom neboli dvaja senátori z rovnakého štátu?

Výsledok: $\binom{50}{4} \cdot 2^4 = 3684800$

Riešenie: Vieme, že v hľadanom výbore má byť každý senátor z iného štátu, preto môžeme postupovať tak, že zvolíme najprv 4 z 50 štátov, ktoré budú senátori zastupovať. Vybrať 4 štáty z 50 dokážeme $\binom{50}{4} = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47/(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$ spôsobmi (výraz $\binom{50}{4}$ označuje tzv. kombinačné číslo). Pri vybranej štvorici štátov už zostáva iba určiť konkrétneho senátora pri každom zo 4 štátov. V každom štáte máme 2 možnosti pre našu voľbu, teda pre všetky štáty je to 2^4 možností. Celkový počet možností je preto súčin $\binom{50}{4} \cdot 2^4 = 3684800$.

<u>**Úloha 2.5:**</u> Annie stands at one vertex of a regular hexagon. Every second, she moves independently to one of the two vertices adjacent to her, each with equal probability. Determine the probability that she is at her starting position after ten seconds.

Výsledok: 171/512

Riešenie: Zadanie hovorí, že máme pravidelný šesťuholník a stojíme v jednom jeho vrchole. V každom kroku sa pohneme na jeden z priľahlých vrcholov. Úlohou je spočítať pravdepodobnosť, s ktorou po desiatich krokoch skončíme na rovnakom mieste, na akom sme začali.
Priraďme každému pohybu z vrcholu na vrchol v smere pohybu hodinových ručičiek hodnotu $+1$ a každému pohybu v protismere hodnotu -1. Celej postupnosti pohybov priraďme hodnotu, ktorá bude súčet hodnôt

všetkých pohybov. Po desiatich pohyboch sa ocitneme v počiatku práve vtedy, keď bude hodnota -6, 0 alebo 6 (hodnoty sú v rozmedzí len od -10 až 10). Stav, kedy bude hodnota postupnosti 0 vieme dosiahnuť len tak, že urobíme práve 5 krokov do jedného a práve 5 krokov do druhého smeru. To vieme vykonať $\binom{10}{5} = 252$ spôsobmi (Vieme si to predstaviť tak, že vykonáme určite desať krokov a kombinačným číslom vyberáme, ktoré z nich budú do jedného zo smerov. Zvyšok je automaticky definovaný do druhého smeru.). Stav s hodnotou 6 dosiahneme práve ôsmimi krokmi do smeru kladného a dvomi do záporného, na čo máme analogicky $\binom{10}{2} = 45$ možností. Stav -6 naopak ôsmimi pohybmi do záporného a dvomi do kladného smeru. Možností na to máme rovnako $\binom{10}{2} = 45$. Existuje teda $252 + 45 + 45 = 342$ rôznych postupností pohybov, ktoré nás dovedú do počiatočnej pozície. Ostáva si uvedomiť, že nakoľko sa rozhodujeme počas cesty nezávisle desaťkrát medzi dvomi smermi, máme $2^{10} = 1024$ rôznych postupností krokov. Hľadaná pravdepodobnosť je potom: $342/1024 = 171/512$.

Úloha 2.6: Štvorsten má päť hrán dĺžky 2 a jednu hranu dĺžky 3. Vypočítajte jeho objem.

Výsledok: $\sqrt{3}/2$

Riešenie: Na spočítanie objemu potrebujeme spočítať výšku telesa a obsah podstavy. Zvoľme si za podstavu nejaký z rovnostranných trojuholníkov. Z Pytagorovej vety vieme vypočítať, že výška v tomto trojuholníku je $\sqrt{3}$, a teda obsah podstavy je $2\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$.
Na spočítanie výšky by sa nám opäť hodila Pytagorova veta. Keď štvorsten rozrežeme rovinou tvorenou hranou dlhou 3 a stredom protiľahlej hrany, dostaneme trojuholník, ktorého strany tvoria dve výšky trojuholníkov (už vieme, že ich dĺžka je $\sqrt{3}$) a strana dlhá 3 (označme ju c). V tomto trojuholníku vieme pomocou Pytagorovej vety spočítať výšku na stranu c vďaka tomu, že je rovnoramenný. Výška v_c bude dlhá $\sqrt{3/4}$.
Obsah toho trojuholníka, ktorý sme dostali rozrezaním štvorstenu, vieme vypočítať dvoma spôsobmi. V prvom spôsobe použijeme stranu c a výšku na ňu. Pre druhý spôsob označme a stranu trojuholníka, ktorá leží v podstave. O a vieme, že je to výška podstavného trojuholníka, a teda $a = \sqrt{3}$. Výška na stranu a v tomto trojuholníku potom predstavuje zároveň aj výšku telesa

$$\begin{aligned} S &= v_c \cdot c/2 = v_a \cdot a/2 \\ 2S &= v_c \cdot c = v_a \cdot a \\ 2S &= 3\sqrt{3/4} = v_a \cdot \sqrt{3} \\ v_a &= 3\sqrt{3/4}/\sqrt{3} \\ v_a &= 3\sqrt{1/4} \\ v_a &= 3/2 \end{aligned}$$

Teraz už máme aj výšku telesa. Potom už len podľa vzorca na objem ihlana dopočítame jeho objem.

$$\begin{aligned} V &= (S_p \cdot v)/3 \\ V &= (\sqrt{3} \cdot 3/2)/3 \\ V &= \sqrt{3}/2 \end{aligned}$$

Preto objem štvorstena je $\sqrt{3}/2$.

Úloha 2.7: Tri reálne čísla x, y, z spĺňajú rovnicu $|x + 2| + |y + 4| + |z - 5| = 1$. Napíšte najväčšiu možnú hodnotu, akú môže mať súčet $x + y + z$.

Výsledok: 0

Riešenie: Vlastnosť absolútnej hodnoty je, že pre každé x platí $|x| \geq x$. Rovnicu zo zadania potom vieme prepísať ako $1 = |x + 2| + |y + 4| + |z - 5| \geq x + 2 + y + 4 + z - 5 = x + y + z + 1$ po úprave dostaneme $0 \geq x + y + z$. Vieme teda, že maximálna hodnota súčtu je 0 a môžeme ju dosiahnuť napríklad voľbou $x = -2$, $y = -4$, $z = 6$.

Úloha 2.8: Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel m, n, pre ktoré platí $mn^2 = 100(n + 1)$.

Výsledok: $(m,n) \in \{(200, 1), (75, 2), (24, 5), (11, 10)\}$

Riešenie: Najprv ukážeme, že n a $n + 1$ sú nesúdeliteľné čísla pre všetky prirodzené n. Predpokladajme, že existuje $q \neq 1$ také, že $q \mid n \wedge q \mid n + 1$. Potom zrejme $n = qa \wedge n + 1 = qb$, kde a, b sú tiež prirodzené. Potom

ale $1 = (n+1) - n = qb - qa = q(b-a)$, teda q delí 1, a teda nutne $q = 1$, čo je spor s predpokladom.
Vráťme sa k zadaniu a predpokladajme, že existuje riešenie. Všimnime si, že n^2 delí ľavú stranu rovnice, teda musí aj pravú. Zároveň sú ale n a $n+1$ nesúdeliteľné a teda nutne $n^2 \mid 100$. Na nájdenie n nám tak ostáva preskúmať len delitele stovky, ktoré sú štvorce. Presnejšie povedané, n je z množiny $\{1, 2, 5, 10\}$, pretože žiadne iné číslo už za číslo n nevyhovuje. Po dosadení každého z nich zistíme, že na prirodzené m vedú všetky štyri možnosti. Riešením úlohy sú teda usporiadané dvojice $(m,n) \in \{(200, 1), (75, 2), (24, 5), (11, 10)\}$

Úloha 2.9: Nájdite čo najdlhší úsek aritmetickej postupnosti prirodzených čísel s diferenciou 60, ktorý je tvorený len prvočíslami.

Výsledok: 11, 71, 131, 191, 251, 311

Riešenie: Pozorujme deliteľnosť členov našej postupnosti číslom 7. Keďže 60 nie je deliteľné 7 (zvolili sme si najmenšie také prvočíslo, ktoré 60 nedelí), tak zvyšky po delení 7 sa v našej aritmetickej postupnosti periodicky menia – konkrétne ako 0, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 0, ... Prvočíslo, ktoré je deliteľné 7 existuje len jedno, a to 7, preto dĺžka našej postupnosti môže byť najviac 7 (ak obsahuje číslo 7) alebo 6 (ak číslo 7 neobsahuje), pretože každé siedme číslo našej aritmetickej postupnosti je deliteľné 7.
Skúsme zistiť, či existuje taká postupnosť so 7 členmi. Táto postupnosť musí začínať číslom 7 (pretože musí obsahovať číslo 7, a $7 - 60$ už nie je prvočíslo). Ďalšie členy sú 67, 127, 187, 247, 307, 367 – avšak $187 = 11 \cdot 17$, preto táto postupnosť nevyhovuje.
Naša aritmetická postupnosť môže mať preto najviac 6 členov – začneme najmenším prvočíslom, ktoré dáva zvyšok 4 po delení 7 (aby nasledujúcich 5 členov nebolo deliteľných 7), a to je 11. Postupnosť teda vyzerá takto: 11, 71, 131, 191, 251, 311. Všetky jej členy sú prvočísla, takže táto postupnosť vyhovuje zadaniu a je najdlhšia možná.

Úloha 2.10: Daný je obdĺžnik $ABCD$ a bod P. Vzdialenosť bodu P od bodov A, B, C je postupne 16, 9, 15. Aká je vzdialenosť bodov P a D?

Výsledok: $\sqrt{16^2 + 15^2 - 9^2} = 20$

Riešenie: Označme si päty kolmíc z bodu P na strany AB, BC, CD a DA postupne ako W, X, Y a Z. Z Pytagorovej vety pre trojuholník DYP a rovnosti $|DY| = |ZP|$ vieme, že

$$|DP|^2 = |YP|^2 + |DY|^2 = |YP|^2 + |ZP|^2. \tag{1}$$

Analogicky dostaneme, že

$$|AP|^2 = |ZP|^2 + |WP|^2 = 16^2 \tag{2}$$
$$|BP|^2 = |WP|^2 + |XP|^2 = 9^2 \tag{3}$$
$$|CP|^2 = |XP|^2 + |YP|^2 = 15^2. \tag{4}$$

Sčítaním rovností (2), (4) a odčítaním (3) dostaneme

$$16^2 + 15^2 - 9^2 = |ZP|^2 + |WP|^2 + |XP|^2 + |YP|^2 - |WP|^2 - |XP|^2 = |ZP|^2 + |YP|^2 = |DP|^2,$$

kde posledná rovnosť platí z (1). Vzdialenosť bodov P a D je preto $\sqrt{16^2 + 15^2 - 9^2} = 20$.

Úloha 2.11: Nech: $x \circ y = \frac{xy}{x+y}$. Nájdite hodnotu výrazu: $2^1 \circ \left(2^2 \circ \left(2^3 \circ \cdots \circ \left(2^{2016} \circ 2^{2017}\right)\right)\right)$.

Výsledok: $\frac{2^{2017}}{2^{2017}-1}$

Riešenie: Všimnime si, že: $x \circ y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$. Skúsme uplatniť operáciu $\circ$ na zopár posledných členov výrazu:

$$2^{2016} \circ 2^{2017} = \frac{1}{\frac{1}{2^{2016}} + \frac{1}{2^{2017}}} \Longrightarrow 2^{2015} \circ (2^{2016} \circ 2^{2017}) = 2^{2015} \circ \frac{1}{\frac{1}{2^{2016}} + \frac{1}{2^{2017}}} = \frac{1}{\frac{1}{2^{2015}} + \frac{1}{2^{2016}} + \frac{1}{2^{2017}}} \Longrightarrow \dots$$

Postupným pripájaním ďalších členov vidíme, že platí:

$$2^1 \circ (2^2 \circ (2^3 \circ \cdots \circ (2^{2016} \circ 2^{2017}))) = \frac{1}{\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{2017}}} = \frac{2^{2017}}{2^{2016} + \cdots + 2 + 1},$$

a teda stačí nájsť sumu geometrickej postupnosti (s kvocientom dva) v menovateli. Označme súčet členov v menovateli ako S. Trikovým odčítaním S od $2S$ dostávame:

$$\begin{array}{llr|c} 2^{2017} & +2^{2016}+2^{2015}+\cdots+4+2 & & 2S \\ & -2^{2016}-2^{2015}-\cdots-4-2 & -1 & -S \\ \hline 2^{2017} & & -1 & S \end{array}$$

Výsledok je preto: $\frac{2^{2017}}{2^{2017}-1}$.

Úloha 2.12: Štvoruholník $ABCD$ je vpísaný do polkružnice s priemerom AD. Ak $|AD| = 4$ a $|AB| = |BC| = 1$, akú dĺžku má strana CD?

Výsledok: 7/2

Riešenie: Urobíme fintu a na oblúk BC si dáme bod E tak, aby $|DE| = 1$. Zjavne platí, že $|BE| = |CD|$, keďže sme akurát vymenili poradie oblúkov na kružnici a rovnako veľkým oblúkom prislúcha rovnako dlhá tetiva. Všimnime si, že $|AB| = |ED|$, a preto $ABED$ je rovnoramenný lichobežník. Nech P je päta kolmice z bodu B na základňu AD a nech O je stred kružnice. Označme $|OP| = x$. Z Pytagorovych viet v trojuholníkoch BOP a ABP máme, že $|PB| = \sqrt{|BO|^2 - |OP|^2} = \sqrt{4 - x^2}$ a $|AP| = \sqrt{|AB|^2 - |BP|^2} = \sqrt{x^2 - 3}$. Keďže $|AO| = 2$, tak máme rovnicu $x + \sqrt{x^2 - 3} = 2$, ktorú ľahko vyriešime. Po odčítaní x a po umocnení na druhú dostávame $x^2 - 3 = x^2 - 4x + 4$, čiže $x = 7/4$.
Na koniec si už len uvedomíme, že $|CD| = |BE| = 2x = 7/2$.

3. časť

Úloha 3.1: Výletná spoločnosť vlastní 3 lode. Prvá z nich chodí na výlety trvajúce 6 dní, druhá na 8 dní a tretia na 15 dní. Na začiatku leta vyrazili z prístavu všetky 3 lode naraz. Po koľkých dňoch sa opäť stretnú v prístave všetky?

Výsledok: 120

Riešenie: Loď sa do prístavu vždy vráti po čase, ktorý predstavuje nejaký celočíselný násobok dĺžky jej výletu. Preto hľadáme najmenší spoločný násobok čísel 6, 8 a 15, čo je 120 dní.

Úloha 3.2: Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré platí, že $29p + 1$ je druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla.

Výsledok: 31

Riešenie: Označme neznáme prirodzené číslo ako n. Vieme, že platí $29p+1 = n^2$, čo je po úprave $29p = n^2 - 1$. Výraz $n^2 - 1$ vieme podľa známeho vzorca upraviť na $(n + 1)(n - 1)$. Platí teda $29p = (n + 1)(n - 1)$. Na ľavej strane je súčin dvoch prvočísel 29 a p, ten sa dá rozložiť na dva činitele len dvoma spôsobmi: buď je jeden z činiteľov 1 a druhý $29p$, alebo je jeden z nich 29 a druhý p.
V prvom z prípadov určite platí $1 < 29p$, takže nutne $n - 1 = 1$ a $n + 1 = 29p$. Potom $n = 2$ a malo by platiť $p = 3/29$, čo nie je celé. Tento prípad teda k riešeniu nevedie.
V druhom prípade si všimneme, že rozdiel medzi p a 29 je rozdiel medzi $n - 1$ a $n + 1$, čiže 2. Keďže 27 nie je prvočíslo, musí platiť $p = 31$. To naozaj vedie k riešeniu pre $n = 30$. Preto jediné riešenie je $p = 31$.

Úloha 3.3: Peťo a Matúš hrajú nasledujúcu hru. Matúš rozseká štvorec 9×9 na niekoľko obdĺžnikov s jednou stranou dĺžky 1, pričom seká len po stranách štvorčekov. Následne Peťo zvolí prirodzené číslo k a Matúš zaplatí Peťovi toľko centov, koľko je celková plocha všetkých obdĺžnikov $1 \times k$ a $k \times 1$. Peťo chce vždy získať čo najviac centov a Matúš mu chce zaplatiť čo najmenej. Zistite koľko najmenej centov môže Matúš zaplatiť Peťovi bez ohľadu na to, ako Peťo volí k.

Výsledok: 12

Riešenie: Vieme nájsť riešenie, kde Matúš zaplatí Peťovi najviac 12 centov. To sa stane, ak Matúš rozseká obdĺžnik na nasledovné dieliky:

9×1	8×1	7×1	6×1	5×1	4×1	3×1	2×1	1×1
1	1	1	1	2	2	3	6	12

Dodajme, že na takéto kúsky štvorec rozrezať naozaj ide. Môžete si to vyskúšať.
Teraz ukážeme, že menej ako 12 centov mu Matúš zaplatiť nevie. Predstavme si, že by to šlo napríklad na 11 centov. Potom by muselo platiť, že súčet plôch každého typu je menší ako 11. V tabuľke vidíme maximálne počty útvarov tak, aby ich obsah nepresiahol 11.

9×1	8×1	7×1	6×1	5×1	4×1	3×1	2×1	1×1
1	1	1	1	2	2	3	5	11

Vidíme, že súčet všetkých obsahov útvarov je 78, pričom štvorec 9×9 má obsah 81. Útvary by teda na pokrytie nestačili. Ak by sme zvolili číslo ešte menšie ako 11, žiaden útvar by nám nepribudol, a teda obsah by nestúpol. Správna odpoveď je teda 12.

Úloha 3.4: Nájdite všetky riešenia rovnice $x^y + 1 = z$ také, že x, y a z sú prvočísla.

Výsledok: $(x, y, z) = (2, 2, 5)$

Riešenie: Ak by x bolo nepárne číslo, tak potom platí, že x^y je tiež nepárne číslo, a teda následne $x^y + 1$ je číslo párne. Keďže $x^y + 1 = z$ a z je prvočíslo, tak by muselo platiť $z = 2$. To ale spätne znamená, že $x^y = 1$, čo ale v prípade, že x a y sú prvočísla, platiť nemôže.
Z toho vyplýva, že x je párne, čiže v našom prípade $x = 2$. Rovnica sa nám teda upravila do tvaru: $2^y + 1 = z$.
Keď sa pozrieme na mocniny 2 tak platí, že pri delení 3 sa nám celý čas striedajú zvyšky 2 a 1. Pričom ak je y nepárne, tak výraz 2^y má zvyšok 2 po delení 3, v prípade, že je y párne je zvyšok rovný 1.
Po sčítaní zvyškov pre nepárne y dostávame, že výraz $2^y + 1$ je deliteľný 3. To ale značí, že aj z je deliteľné 3 a keďže je to prvočíslo, tak jediná varianta je $z = 3$. V tom prípade dostávame $2^y + 1 = 3$, odkiaľ $y = 1$ čo je ale spor s tým, že y je prvočíslo.
Ostala nám posledná možnosť a to, že y je párne, čiže $y = 2$. Teraz máme $2^2 + 1 = z$, z čoho $z = 5$ čo je jediné vyhovujúce riešenie tejto rovnice.

Úloha 3.5: Find the number of positive integers with three not necessarily distinct digits, $\overline{abc}$, with $a \neq 0$, $c \neq 0$ such that both $\overline{abc}$ and $\overline{cba}$ are divisible by 4.

Výsledok: 40

Riešenie: Úlohou je nájsť počet čísel tvaru $\overline{abc}$ (v cifernom zápise) takých, že $a \neq 0$, $c \neq 0$ a zároveň platí, že čísla $\overline{abc}$ aj $\overline{cba}$ sú obe deliteľné štyrmi.
Číslo je deliteľné štyrmi práve vtedy, keď je jeho posledné dvojčíslie deliteľné štyrmi. Cifry a a c tak nutne musia byť z množiny $\{2, 4, 6, 8\}$ (nepárne čísla nie sú deliteľné štyrmi). Teraz si uvedomme, že dvojčíslie $\overline{ba}$ (resp. $\overline{bc}$) je ekvivalentné číslu $10b + a$ (resp. $10b + c$). Chceme teda, aby $4|10b + a$ (resp. $4|10b + c$), teda $4|2b + a$ (resp. $4|2b + c$). Rozoberme dva prípady:

1. b je párne: pre a (resp. c) vyhovujú cifry 4 a 8 (a a c pritom vieme zvoliť nezávisle). Párnych cifier b je jasne 5. Táto možnosť nás privádza ku $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$ číslam $\overline{abc}$ s hľadanou vlastnosťou.
2. b je nepárne: pre a (resp. c) vyhovujú cifry 2 a 6 (a a c pritom vieme zvoliť nezávisle). Párnych cifier b je jasne 5. Táto možnosť nás privádza ku $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$ číslam $\overline{abc}$ s hľadanou vlastnosťou.

Čísel vyhovujúcich zadaniu je $20 + 20 = 40$.

Úloha 3.6: Máme v rovine trojuholník ABC s obsahom S. Jeho otočením okolo ťažiska o 180 stupňov dostaneme trojuholník $A'B'C'$. Určte obsah útvaru, ktorý je prienikom trojuholníkov ABC a $A'B'C'$.

Výsledok: $(2/3)S$

Riešenie: Otočením trojuholníka okolo jeho ťažiska dostaneme akúsi hviezdu. Poďme sa pozrieť na jej cípy (časti ležiace mimo prieniku). Majme trojuholník a otočme jeho základňu o 180° okolo ťažiska. Je zjavné, že otočená priamka bude rovnobežná s tou pôvodnou. Teraz si môžeme všimnúť, že vďaka rovnobežnosti sú pôvodný trojuholník a novovzniknutý trojuholník podobné. Vieme, že ťažisko leží v tretine ťažnice od strany, teda ťažisko je v tretinovej výške oproti vrcholu (vieme z podobnosti). Strana sa teda zobrazí do 2/3 výšky od strany. Z toho vyplýva, že malý a veľký trojuholník sú v pomere $1 : 3$, a teda ich obsahy sú v pomere $1 : 9$. Takéto cípy odrežeme z trojuholníka tri. Obsah prieniku je teda $S - 3 \cdot (1/9)S = (2/3)S$

Úloha 3.7: Nech n je kladné celé číslo. Riadok s $n+1$ štvorcami očíslujeme zľava doprava číslami $0, 1, 2, \ldots, n$. Dorka a Katka na ňom hrajú hru. Obe začínajú na políčku 0. Každú sekundu spravia pohyb doprava podľa nasledujúcich pravidiel: Ak je aspoň 8 štvorcov napravo od Dorkinej figúrky, potom Dorka skočí o 8 políčok doprava. Ináč sa posunie Dorka len o jedno políčko doprava. Ak je aspoň 7 štvorcov napravo od Katkinej figúrky, potom Katka skočí o 7 políčok doprava. Ináč sa Katka posunie len o jedno políčko doprava. Označme $D(n)$ a $K(n)$ počet sekúnd u Dorky, respektíve Katky, za ktoré sa dostanú na políčko n. Napríklad $D(40) = 5$ a $K(40) = 10$. Určte najväčšie n, pre ktoré je $K(n) < D(n)$.

Výsledok: 343

Riešenie: Zapíšme si naše číslo n ako $8k + x = 7l + y$. Vieme, že $D(n) = k + x$ a $K(n) = l + y$. Chceme, aby platilo $l + y < k + x$. Vieme, že $k \leq l$ preto nás zaujíma, o koľko najviac môže byť x väčšie od y. Tieto čísla sú zvyšky čísla n po delení ôsmimi a siedmimi, preto môže byť x najviac 7 a y najmenej 0, čiže ich rozdiel nikdy nebude viac ako 7. Preto môže byť rozdiel $l - k$ najviac 6.
Vieme, že $56m = 8 \cdot 7m = 7 \cdot 8m$, preto pre každé číslo väčšie ako $7 \cdot 56$ bude rozdiel $l - k$ aspoň 7. Takže hľadáme číslo v tvare $6 \cdot 56 + z$, kde $z < 56$ so zvyškom 7 po delení ôsmimi. Jediné také číslo je $6 \cdot 56 + 7 = 343$.

Úloha 3.8: Pri práci ste dostali nasledujúcu postupnosť bodiek a čiarok dĺžky $4n$ pripomínajúcich morseovku bez oddeľovačov. $- - \cdot \cdot - - \cdot \cdot \ldots - - \cdot \cdot$ (znakov je $4n$). Koľkými spôsobmi sa dajú do postupnosti doplniť oddeľovače tak, aby vzniknuté písmená boli len písmená zo slova MATEMATIKA?

Výsledok: $4 \cdot 5^{n-1}$

Riešenie: Uvedomme si, že písmeno K v našej postupnosti nájsť nevieme. Ostali nám potom len písmená s morseovkovým zápisom dĺžky najviac 2. Keďže nemáme k dispozícii písmeno N $(-\cdot)$, tak musíme medzi každú $-$ a $\cdot$ dať oddeľovač. Naša postupnosť sa nám tak rozpadne na $--$ na začiatku, $\cdot\cdot$ na konci a $n-1$ štvoríc $\cdot \cdot - -$.
Keďže ostatné písmená, čo máme, nám pokrývajú všetky možnosti jedného znaku alebo dvoch znakov za sebou (okrem $-\cdot$), tak stačí keď umiestnime zvyšné oddeľovače tak, aby nenasledovali tri neoddelené znaky za sebou. Na dvojicu na začiatku aj na konci máme dve možnosti, pretože buď medzi ne dáme oddeľovač, alebo nie.
V každej zo zvyšných štvoríc máme 3 miesta, kde môžeme dať oddeľovače. Teda máme celkovo $2^3 = 8$ možností, ako ich tam dať. Avšak z týchto možností nám nevyhovujú tie 3 ($\cdot | \cdot - -$, $\cdot \cdot - | -$, $\cdot \cdot - -$), pri ktorých ostanú viac ako dva symboly za sebou neoddelené. Preto máme len 5 možností ako tam dať oddeľovače.
Celkový počet možností ako umiestniť oddeľovače je preto $2 \cdot 5^{n-1} \cdot 2 = 4 \cdot 5^{n-1}$.

Úloha 3.9: Nech $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 2017\}$. Navyše platí, že ak $a, b \in S$, tak $a - b$ nedelí $a + b$. Koľko najviac prvkov môže mať množina S?

Výsledok: 673

Riešenie: Množina S zjavne nemôže obsahovať dve po sebe idúce čísla. Tak isto nemôže obsahovať ani dve čísla s rozdielom 2, pretože ak S obsahuje a a zároveň $a + 2$, tak máme, že $a - (a + 2) \mid a + (a + 2)$, teda $-2 \mid 2a + 2$, čo je spor. Preto z každej trojice po sebe idúcich čísel je v množine S najviac jedno, čiže je ich tam maximálne $2019/3 = 673$.
Na druhú stranu, ak v množine S budú len čísla, ktoré dávajú zvyšok 1 po delení 3, tak ich tam bude práve 673 a podmienka nebude porušená – rozdiel ľubovoľných 2 čísel z S bude deliteľný 3, a preto nemôže deliť ich súčet, ktorý nebude deliteľný 3.
S môže mať najviac 673 prvkov.

Úloha 3.10: Na kružnici leží n bodov. Vyberieme náhodne tri z nich a označíme ich A, B, C. Označíme ešte ďalšie tri zo zvyšných $n - 3$ bodov X, Y, Z (tiež náhodne). Aká je pravdepodobnosť, že sa trojuholníky ABC a XYZ pretínajú?

Výsledok: 7/10

Riešenie: V skutočnosti vyberáme 6-ticu rôznych bodov A, B, C, X, Y, Z. Môžeme ju vybrať takým spôsobom, že si najprv (náhodne) vyberieme 6-ticu bodov, ktoré budú bodmi A, B, C, X, Y, Z a až potom si vyberieme (náhodne), ktoré budú ktoré. Keď máme vybratých našich 6 bodov, tak môžeme všetky ostatné body na kružnici zmazať. Je jasné, že trojuholníky ABC a XYZ sa nebudú prekrývať práve vtedy, keď body ABC sú tri po sebe idúce body. Počet možností ako vybrať tri po sebe idúce body je 6 a počet všetkých spôsobov ako vybrať 3 body zo 6 je $\binom{6}{3} = 20$. Preto hľadaná pravdepodobnosť je $1 - 6/20 = 14/20 = 7/10$.

Úloha 3.11: Body M a N sú postupne na stranách BC a CD štvorca $ABCD$ tak, že uhly BMA a NMC majú veľkosť $60°$. Nájdite veľkosť uhla MAN.

Výsledok: $45°$

Riešenie: Všimnime si, že v trojuholníku NMC je AC os vnútorného uhla pri vrchole C a MA je os vonkajšieho uhla pri vrchole M. Preto je bod A stredom pripísanej kružnice do tohto trojuholníka a leží aj na tretej osi – osi vonkajšieho uhla pri vrchole N. Keďže $|\sphericalangle MNC| = 30°$, tak $|\sphericalangle ANM| = (180° - 30°)/2 = 75°$. Potom z trojuholníka AMN ľahko dopočítame, že $|\sphericalangle MAN| = 180° - |\sphericalangle AMN| - |\sphericalangle ANM| = 180° - 60° - 75° = 45°$.

Úloha 3.12: Nájdite všetky reálne čísla a, pre ktoré má rovnica $x^3 - x^2(a+1) - 2x(a+2) + a^2 + 2a + 9 = 0$ tri reálne riešenia, z ktorých dve sú menšie ako 2 a jedno je väčšie ako 2.

Výsledok: $a \in (1, 5)$

Riešenie: Označme $P_a(x) = x^3 - x^2(a+1) - 2x(a+2) + a^2 + 2a + 9$. Všimnime si, že $P_a(0) = a^2 + 2a + 9 = (a+1)^2 + 8 > 0$, pre všetky hodnoty parametra a. To znamená, že polynóm $P_a(x)$ má nutne koreň, ktorý je menší ako 0, lebo pre veľmi záporné hodnoty x bude isto aj hodnota $P_a(x)$ záporná. (Formálne povedané, využívame, že polynóm je spojitá funkcia.)
Uvedomíme si, že na to, aby mal polynóm $P_a(x)$ dva korene menšie ako 2 a jeden väčší ako 2, musí byť nutne $P_a(2) < 0$ – stačí si načrtnúť jeho graf. Ak je totiž $P_a(2) > 0$ a napr. $P_a(-100) < 0$, tak má tento graf nepárny počet priesečníkov s osou x pod dvojkou, čo znamená nepárny počet koreňov menších ako 2.
Táto podmienka je aj postačujúca, lebo ak $P_a(2) < 0$, tak má $P_a(x)$ jeden koreň medzi 0 a 2, jeden pod nulou a jeden koreň väčší ako 2, keďže naša funkcia je pre veľké x kladná.
Riešime preto ľahkú kvadratickú nerovnicu $P_a(2) < 0$, čo sa nám upraví na $a^2 - 6a + 5 = (a-1)(a-5) < 0$. Preto $a \in (1, 5)$.

autori:	Jakub Genči, Florián Hatala, Matúš Hlaváčik, Veronika Hubeňáková, Peter Kovács, Henrieta Micheľová, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Zuzka Ontkovičová, Žaneta Semanišinová, Roman Staňo, Martin Vodička
recenzia a úprava:	Jana Baranová, Tomáš Kocák, Martin Menkyna
názov:	**Košický MATBOJ – 27. 10. 2017**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
www:	https://seminar.strom.sk/sk/matboj/ http://itakademia.sk/

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk