Košický Matboj

Košice, 27. 10. 2023

1. časť

Úloha 1.1: Na kôpke leží 5 kariet, na ktorých sú postupne napísané čísla 1, 2, 3, 4 a 5. Viki, Mimi a Kristín si postupne vytiahli po jednej karte. Následne povedali:

- Viki: Na mojej kartičke je prvočíslo.
- Mimi: Na mojej kartičke je nepárne číslo.
- Kristín: Číslo na mojej kartičke má práve 2 deliteľov.

Bohužiaľ, všetky klamali. Aké číslo má na kartičke Mimi?

Výsledok: 2

Riešenie: Všetky tri výroky zo zadania sú nepravdivé, teda platí ich presný opak:

- Na kartičke Viki **nie je prvočíslo**, čiže Viki musí mať 1 alebo 4.
- Na kartičke Mimi je **párne číslo**, čiže Mimi musí mať 2 alebo 4.
- Číslo na kartičke Kristín **nemá** práve 2 deliteľov (nejde o prvočíslo), čiže Kristín musí mať 1 alebo 4.

Všimnime si, že kartičky s číslami 1 a 4 musia nutne mať Viki a Kristín. Na Mimi potom však zvýši iba 2, keďže musí mať kartičku s párnym číslom.

Úloha 1.2: Martin chodí do školy dvomi rôznymi spôsobmi po rovnakej ceste. Prvým spôsobom ide najprv 13 minút autobusom a potom 25 minút pešo. Druhým spôsobom ide najprv 20 minút autobusom a potom 11 minút pešo. Koľko minút by Martinovi trvalo, ak by mal prejsť celú cestu pešo?

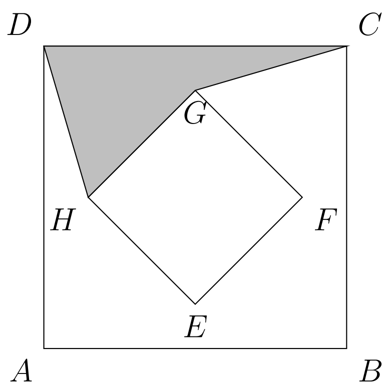
Výsledok: 51

Riešenie: Označme si a rýchlosť autobusu a p rýchlosť, akou ide Martin pešo. Zo zadania nám na základe rovnakej dĺžky cesty vyplýva nasledujúca rovnica:

$$\begin{aligned} 13a + 25p &= 20a + 11p \\ 14p &= 7a \\ a &= 2p \end{aligned}$$

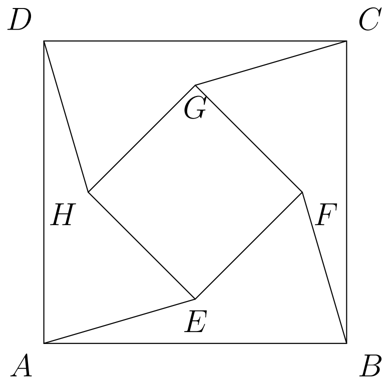
Vidíme teda, že autobus je dvakrát rýchlejší ako pešia chôdza. Ak teda napríklad v časoch 13 minút autobusom a 25 minút pešo zmeníme každú minútu jazdy autobusom na 2 minúty pešej chôdze, dostaneme $13 \cdot 2 + 25 = 51$ minút pešej chôdze.

Úloha 1.3: Štvorec $ABCD$ má dĺžku strany 12 a štvorec $EFGH$ má dĺžku strany 6. Priesečník uhlopriečok štvorca $ABCD$ je totožný s priesečníkom uhlopriečok štvorca $EFGH$. Zistite obsah štvoruholníka $HGCD$ (sivá plocha na obrázku).



Výsledok: 27

Riešenie: Štvorec $ABCD$ má obsah $12 \cdot 12 = 144$. Štvorec $EFGH$ má obsah $6 \cdot 6 = 36$. Plocha štvorca $ABCD$, ktorá je mimo štvorca $EFGH$, má potom obsah $144 - 36 = 108$ a vieme ju rozdeliť na 4 obsahovo zhodné časti ako na obrázku. Tieto časti sú zhodné, pretože keď otočíme celý obrázok o 90 stupňov okolo priesečníka uhlopriečok našich dvoch štvorcov, tak sa tieto štvorce zobrazia na seba rovnako ako aj tieto 4 časti.



Sivá časť má teda obsah $108/4 = 27$.

Úloha 1.4: Majme kváder s celočíselnými dĺžkami hrán. Keď si vezmeme jeho dve steny, ktoré majú najväčší obsah, tak obsah každej je 240 a naopak obsah každej z dvoch najmenších stien je 48. Aký je obsah zvyšných dvoch stien? Nájdite všetky možnosti.

Výsledok: 80, 180

Riešenie: Označme dĺžky hrán kvádra a, b, c a bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme $a \leq b \leq c$. Potom vieme, že obsah dvoch najväčších stien je $b \cdot c = 240$ a obsah dvoch najmenších stien je $a \cdot b = 48$. Potom pre obsah prostredných dvoch stien platí:

$$48 < a \cdot c < 240$$

$$48 < \frac{48}{b} \cdot \frac{240}{b} < 240$$

$$1 < \frac{240}{b^2} < 5$$

$$240 > b^2 > 48$$

Keďže kváder má celočíselné dĺžky hrán, b musí byť celočíselný deliteľ 48 (aj 240, ale keďže 240 je deliteľné 48, každý deliteľ 48 je zároveň deliteľ 240). Delitele 48 sú 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 a 48, z nich iba 8 a 12 spĺňajú podmienku $240 > b^2 > 48$.

Ak $b = 8$, potom $a = 6$ a $c = 30$, teda obsah prostredných stien je $a \cdot c = 6 \cdot 30 = 180$.

Ak $b = 12$, potom $a = 4$ a $c = 20$, teda obsah prostredných stien je $a \cdot c = 4 \cdot 20 = 80$.

Úloha 1.5: Janka má na začiatku tréningu pravdepodobnosť $1/10$, že trafí terč. Janka je však veľmi učenlivá a s každým pokusom sa zmení jej pravdepodobnosť trafiť terč z $1/n$ na $1/(n-1)$. Aká je pravdepodobnosť, že sa jej prvý raz podarí trafiť terč v prvých šiestich pokusoch?

Výsledok: 3/5

Riešenie: Na to, že sa Janka prvý raz trafí v konkrétnom pokuse, je pravdepodobnosť rovná súčinu pravdepodobnosti, že sa vo všetkých predošlých netrafila a pravdepodobnosti, že sa v danom pokuse trafí. Rozoberme si jednotlivo prípady, že sa Janka prvý raz trafí v konkrétnom z prvých šiestich pokusoch:

- prvý pokus: $\frac{1}{10}$,
- druhý pokus: $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$,
- tretí pokus: $\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$,
- štvrtý pokus: $\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{10}$,
- piaty pokus: $\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$,
- šiesty pokus: $\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.

Pravdepodobnosť, že sa jej prvý zásah vyskytne v niektorom z prvých šiestich pokusov, je rovná súčtu pravdepodobnosti, že sa jej prvý raz podarí terč trafiť v prvom pokuse, pravdepodobnosti, že sa jej prvý raz podarí terč trafiť v druhom pokuse, a tak ďalej až v šiestom pokuse. Na získanie výslednej pravdepodobnosti teda sčítame vyššie uvedené pravdepodobnosti pre tieto pokusy:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Pravdepodobnosť, že prvý raz Janka trafí do terča v prvých šiestich pokusoch, je 3/5.

Úloha 1.6: Pre rôzne cifry X, Y, Z, W platí:

$$Z + W + W = X$$
$$Z + Z = \overline{WY}$$
$$Z \cdot Z = \overline{YX}$$

Určte hodnotu $X \cdot Y + Z \cdot W$. Zápis $\overline{AB}$ reprezentuje číslo s ciframi A, B v tomto poradí (ak je cifra A rovná 0, ide o jednociferné číslo).

Výsledok: 43

Riešenie: Z druhej rovnice vidíme, že cifra W môže nadobúdať len hodnoty 0 alebo 1, pretože súčet $Z + Z$ je dvojnásobok jednociferného čísla, čo je maximálne 18.

Ak by sa W rovnalo 0, tak prvá rovnica by hovorila $Z = X$. To však nemôže platiť, pretože zo zadania sú všetky cifry rôzne. Preto musí platiť $W = 1$.

Z prvej rovnice vieme, že súčet $Z + W + W$ je jednociferné číslo, teda $Z + 2$ je jednociferné číslo. Z toho dostávame, že Z je maximálne 7.

Z druhej rovnice vieme, že $Z + Z$ je dvojciferné číslo, preto Z je minimálne 5.

Z tretej rovnice vieme, že súčin $Z \cdot Z$ sa končí na cifru X, teda na cifru inú ako Z. Keďže $5 \cdot 5 = 25$ a $6 \cdot 6 = 36$, tak Z nemôže byť 5 ani 6. Preto musí platiť $Z = 7$. Z toho vyplýva $Y = 4$, $X = 9$.

Overme, že tieto hodnoty vyhovujú každej rovnici:

$$7 + 1 + 1 = 9$$
$$7 + 7 = 14$$
$$7 \cdot 7 = 49$$

Hodnota $X \cdot Y + Z \cdot W = 9 \cdot 4 + 7 \cdot 1$ je rovná 43.

Úloha 1.7: Na futbalovom turnaji hrá 8 tímov, pričom každý s každým hrá práve raz. Za výhru tím dostane 2 body, za remízu 1 bod a za prehru 0. Koľko najmenej bodov musí tím získať, aby zaistil, že bude mať viac bodov ako aspoň štyri iné tímy (bez ohľadu na to, koľko bodov získajú ostatné tímy)?

Výsledok: 11

Riešenie: Všetkých zápasov na turnaji bude $7 \cdot 8/2$, lebo každý z ôsmich tímov bude hrať práve jeden zápas s každým zo siedmich zvyšných tímov. Za každý zápas sa bez ohľadu na výsledok rozdajú práve dva body. Takže na konci turnaja bude súčet bodov jednotlivých tímov rovný $7 \cdot 8 = 56$.

Posledné tri tímy budú mať bez ohľadu na výsledok v súčte minimálne 6 bodov za zápasy proti sebe. Ak by prvých 5 tímov malo po 10 bodov, tak by neexistoval tím, ktorý by mal viac bodov ako 4 iné tímy. Takáto situácia môže nastať tak, že prvých 5 tímov všetky zápasy proti sebe navzájom remízuje a zvyšné vyhrá. Takže počet bodov potrebných na to, aby niekto predbehol aspoň štyri tímy, je aspoň 11.

Ak bude mať nejaký tím 11 bodov a zároveň nepredbehne aspoň 4 tímy, tak to znamená, že najlepších 5 tímov by malo v súčte aspoň $11 \cdot 5 = 55$ bodov. Keďže najhoršie tri tímy musia mať v súčte aspoň 6 bodov, tak súčet bodov všetkých tímov by musel byť aspoň 61, čo je v rozpore s tým, že súčet bodov všetkých tímov musí byť 56. Takto prichádzame k sporu, čiže predpoklad, že môže existovať tím, čo má 11 bodov a nebude v prvej štvorici, je nesprávny.

Úloha 1.8: Majme kladné celé číslo n. V jednom kroku urobíme to, že od aktuálneho čísla odčítame jeho najmenšieho prvočíselného deliteľa. Po 1419 krokoch je naše aktuálne číslo prvočíslo. Nájdite všetky možnosti pre číslo n.

Výsledok: 2840, 2841, 2881

Riešenie: Ak bude číslo n párne, budeme od neho opakovane len odčítavať číslo 2, až kým sa po všetkých krokoch nedostaneme k prvočíslu 2. Existuje teda práve jedna možnosť, ako môže byť n párne, a to $2 + 2 \cdot 1419 = 2840$.

V prípade, že je n nepárne, bude jeho najmenší prvočíselný deliteľ, nazvime ho k, taktiež nepárne číslo. Po prvom odčítaní sa dostaneme k párnemu číslu, čo znamená, že začneme opäť opakovane odčítavať číslo 2, až kým sa zase dostaneme k prvočíslu 2. Číslo n si teda vieme vyjadriť ako $2 + 2 \cdot 1418 + k = 2838 + k$. Vieme, že k je najmenší prvočíselný deliteľ čísla $n = 2838 + k$, takže k musí byť nepárnym prvočíselným deliteľom 2838.

Keďže $2838 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 43$, k môže nadobúdať jedine hodnoty 3, 11 a 43.

Pre $k = 3$ dostávame $n = 2841$. Najmenším prvočíselným deliteľom 2841 je naozaj 3, takže dostávame vyhovujúce n.

Keď zvolíme $k = 11$, n bude rovné 2849. Toto číslo je však deliteľné aj číslom 7, takže 11 nie je jeho najmenší prvočíselný deliteľ, a teda $k = 11$ nevyhovuje.

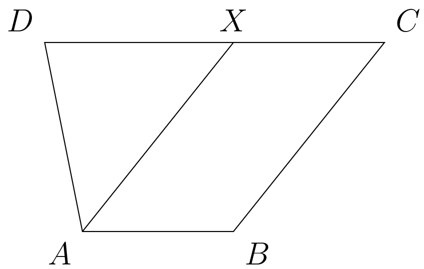
Nakoniec skúsime $k = 43$. Získame $n = 2881$. Číslo 2881 je súčinom prvočísel 43 a 67, takže $k = 43$ tiež vyhovuje.

Získali sme teda spolu 3 možné hodnoty pre n, ktorými sú 2840, 2841 a 2881. Žiadne iné hodnoty nevyhovujú.

Úloha 1.9: Majme lichobežník $ABCD$, kde AB je rovnobežné s CD, uhol ABC má 125° a platí rovnosť $|AB| + |AD| = |CD|$. Určte veľkosť uhla ADC.

Výsledok: 70°

Riešenie: Do lichobežníka dokreslíme bod X tak, aby $ABCX$ bol rovnobežník:



Vieme, že $|AB| = |XC|$ a zo zadania vieme, že $|AB|+|AD| = |CD|$, preto $|DX| = |DA|$. Trojuholník ADX je teda rovnoramenný. Protiľahlé uhly v rovnobežníku majú rovnakú veľkosť a zo zadania vieme, že uhol ABC má 125°, preto aj uhol AXC má 125°. Uhol AXD má potom $180° - 125° = 55°$. Z rovnoramennosti trojuholníka ADX aj uhol DAX má 55°. Uhol ADC má $180° - 55° - 55° = 70°$.

Úloha 1.10: Na tabuli sú napísané čísla 10^6 a 10^9. Mihál na tabuľu v každom kroku napíše aritmetický priemer dvoch čísel na tabuli, ak výsledný priemer je celé číslo a ešte nie je napísaný na tabuli. Koľko čísel bude napísaných na tabuli v situácii, keď už Mihál nebude môcť pridať žiadne číslo?

Výsledok: 65

Riešenie: Pri písaní nového čísla nás zaujíma iba stred na číselnej osi medzi dvoma číslami. Nezáleží nám na tom, kde je začiatok a koniec intervalu, iba to, aký je tento interval veľký. Preto ak by na začiatku boli na tabuli napísané čísla 0 a $999 \cdot 10^6$, tak by bol výsledok rovnaký, ako keby tam boli napísané čísla 10^6 a 10^9.

Pre jednoduchosť budeme teda až do konca riešenia uvažovať, že na začiatku sú na tabuli čísla 0 a $999 \cdot 10^6$. Zo zadania ďalej vyplýva, že bez ohľadu na poradie krokov bude napokon na tabuli rovnaký počet čísel. To znamená, že pri našom riešení sa vôbec nemusíme zaoberať tým, v akom poradí dopisujeme jednotlivé čísla. Akonáhle sa dostaneme do situácie, v ktorej už nemôžeme na tabuľu dopísať žiadne ďalšie číslo, dostali sme sa k riešeniu.

Na začiatku sú na tabuli čísla 0 a $999 \cdot 10^6$. Následne na tabuľu napíšeme ich priemer – číslo $999 \cdot 5 \cdot 10^5$. 1 interval o veľkosti $999 \cdot 10^6$ tak rozdelíme na 2 intervaly polovičnej veľkosti. Následne oba tieto intervaly rozdelíme na polovicu a vzniknú tak dokopy 4 intervaly veľkosti $999 \cdot 5^2 \cdot 10^4$. Tieto ďalej rozdelíme na 8 intervalov veľkosti $999 \cdot 5^3 \cdot 10^3$. Tie rozdelíme na 16 intervalov veľkosti $999 \cdot 5^4 \cdot 10^2$, tie na 32 intervalov veľkosti $999 \cdot 5^5 \cdot 10$ a tie na 64 intervalov veľkosti $999 \cdot 5^6$. Toto číslo ale už je nepárne, a preto interval danej veľkosti nevieme rozdeliť ďalej – aritmetický priemer jeho okrajových bodov nie je celé číslo.

Na tabuli bude na konci napísaných 65 čísel v tvare $k \cdot (999 \cdot 5^6)$ pre $k \in \{0, \dots, 64\}$, ktoré rozdeľujú pôvodný interval veľkosti $999 \cdot 10^6$ na 64 intervalov veľkosti $999 \cdot 5^6$.

Ostáva overiť, že takýmto spôsobom napíšeme všetky čísla, a teda že po poslednom kroku už nebude možné napísať žiadne ďalšie číslo. Pre spor predpokladajme, že existujú dve napísané čísla, $a \cdot (999 \cdot 5^6)$ a $b \cdot (999 \cdot 5^6)$, ktorých aritmetický priemer je celé číslo a ešte nie je na tabuli napísaný. Tento priemer je $((a + b)/2)(999 \cdot 5^6)$. Keďže $999 \cdot 5^6$ je nepárne číslo, tak výraz $((a + b)/2)(999 \cdot 5^6)$ bude celým číslom iba ak hodnota $(a + b)/2$ je celé číslo. Hodnota $(a + b)/2$ je ale aritmetický priemer čísel a, b, čo znamená, že ak to je celé číslo, tak musí byť z intervalu $\langle a, b\rangle$, a preto aj z intervalu $\langle 0, 64\rangle$. To ale znamená, že číslo $((a + b)/2) \cdot (999 \cdot 5^6)$ už na tabuli je napísané. Došli sme k sporu a tak sme dokázali, že 65 čísel tvaru $k \cdot (999 \cdot 5^6)$ pre $k \in \{0, \dots, 64\}$ budú skutočne všetky čísla, ktoré na tabuľu napíšeme.

Úloha 1.11: Nech m, n sú kladné celé čísla a p je prvočíslo. Vieme, že tieto čísla spĺňajú rovnicu $p^n + 3600 = m^2$. Aké všetky hodnoty môže nadobúdať číslo m?

Výsledok: 61, 65, 68

Riešenie: Odčítaním 3600 od oboch strán rovnice a rozložením pravej strany na súčin získame $p^n = (m+60)(m-60)$. Keďže ľavá strana je mocnina prvočísla p, obe zátvorky napravo sú mocninami p. Uvažujme najprv, že jedna z nich je rovná 1. Nutne to musí byť menšia z nich, a teda $m - 60$. Potom $m = 61$ a $p^n = 11^2$, čo nám dáva jedno riešenie.

Uvažujme teraz, že obe zátvorky sú väčšie než 1. Z toho vyplýva, že obe sú deliteľné p, a preto je aj rozdiel $(m + 60) - (m - 60) = 120$ deliteľný p. Z prvočíselného rozkladu 120 dostaneme, že p je rovné 2, 3 alebo 5.

Hľadáme dve mocniny p, ktorých rozdiel je 120. Na to nám stačí nájsť najmenšiu mocninu p, ktorá je väčšia ako 120, pretože každá väčšia mocnina bude jej násobkom, a teda jej vzdialenosť od všetkých mocnín p bude väčšia než 120. Druhá mocnina potom musí byť číslo o 120 menšie, pokiaľ to teda je mocnina p. Prejdime teraz postupne všetky tri možnosti pre p.

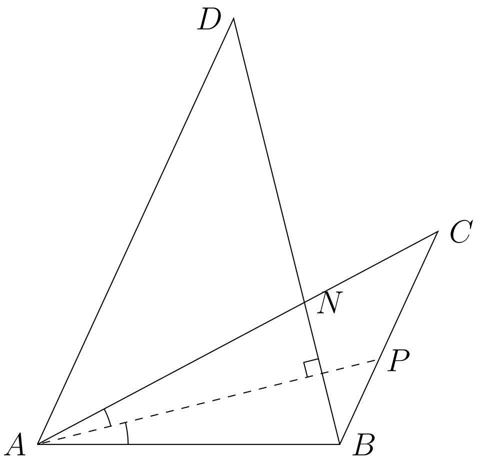
- $p = 2$: Hľadaná mocnina je $2^7 = 128$, a teda $m+60 = 128 = 2^7$ a $m-60 = 128-120 = 8 = 2^3$. Dostávame, že $p^n = 2^{10}$ a $m = 128 - 60 = 68$ je riešením.
- $p = 3$: Hľadaná mocnina je $3^4 = 243$, ale $243-120 = 123$ nie je mocnina 3. Táto možnosť preto nevedie k riešeniu.
- $p = 5$: Hľadaná mocnina je $5^3 = 125$, a teda $m+60 = 125 = 5^3$ a $m-60 = 125-120 = 5 = 5^1$. Dostávame, že $p^n = 5^4$ a $m = 125 - 60 = 65$ je posledným riešením.

Možné hodnoty m sú 61, 65 a 68.

Úloha 1.12: Nech ABC je rôznostranný trojuholník, v ktorom strana AC je dlhšia ako AB. Bod P leží na úsečke BC tak, že priamka AP je osou uhla BAC. Priamka kolmá na AP prechádzajúca bodom B sa pretína s priamkou rovnobežnou s BC prechádzajúcou bodom A v bode D. Aká je dĺžka úsečky AD ak $|BP| = 2$ a $|PC| = 3$?

Výsledok: 10

Riešenie:



Z vety o osi uhla vieme, že:

$$\frac{2}{3} = \frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Označme si teda $|AB| = 2x$. Potom $|AC| = 3x$. Ďalej si označme priesečník AC a BD ako N. V trojuholníku ABN je os uhla BAN kolmá na BN. Trojuholník ABN je teda osovo súmerný podľa tejto osi, a teda je aj rovnoramenný. Z rovnoramennosti vieme, že $|AN| = |AB| = 2x$, potom $|NC| = x$. Na záver si všimnime, že trojuholník BNC je podobný s trojuholníkom DNA, pretože uhly BNC a DNA sú vrcholové a uhly BCN a DAN sú striedavé. Z podobnosti vieme:

$$\frac{|AD|}{|AN|} = \frac{|CB|}{|CN|}$$

$$|AD| = |AN|\frac{|CB|}{|CN|}$$

$$|AD| = 2x\frac{5}{x}$$

$$|AD| = 10$$

Dĺžka strany AD je teda 10 cm.

2. časť

Úloha 2.1: Na koncert predávajú dvakrát viac miest na státie než miest na sedenie. Z celkovej kapacity miest je predaná štvrtina miest na státie a polovica miest na sedenie. Aký je celkový počet miest v koncertnej sále, ak zatiaľ zostáva nepredaných celkom 1000 miest?

Výsledok: 1500

Riešenie: Označme si počet miest na sedenie ako x. Potom vieme, že:

- celkový počet miest na predaj je $3x$,
- aktuálne je predaných $(1/4)(2x) + (1/2)x$ miest,
- 1000 miest je ešte nepredaných.

Z týchto troch bodov dostávame rovnicu: $(1/4)(2x)+(1/2)x+1000 = 3x$. Sčítaním zlomkov dostávame $x+1000 = 3x$, t. j. $x = 500$. Celkový počet miest v koncertnej sále je potom $3x = 3 \cdot 500 = 1500$.

Úloha 2.2: Majme teleso so 62 stenami, pričom 20 z nich je rovnostranných trojuholníkov, 30 je štvorcov a 12 je pravidelných päťuholníkov. Koľko hrán má toto teleso?

Výsledok: 120

Riešenie: Najprv sčítajme, koľko hrán majú spolu všetky steny telesa. Steny tvorí 20 trojuholníkov, 30 štvoruholníkov a 12 päťuholníkov. Spolu majú teda $20 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 12 \cdot 5 = 240$ hrán. Následne si uvedomme, že každú hranu telesa vždy zdieľajú 2 steny. Každú reálnu hranu nášho telesa teda v tomto súčte máme započítanú dvakrát. Celkový počet hrán je preto $240/2 = 120$.

Úloha 2.3: Aké je najmenšie kladné celé číslo k, pre ktoré platí, že $k!$ je deliteľné 1 000 000?

Výsledok: 25

Riešenie: Uvedomme si, že $1\ 000\ 000 = 10^6 = 2^6 \times 5^6$, a teda číslo deliteľné miliónom musí mať v prvočíselnom rozklade aspoň šesťkrát číslo 2 a aspoň šesťkrát číslo 5. Vo faktoriáli je súčin všetkých čísel idúcich za sebou až po k, a teda sa tam budú častejšie vyskytovať čísla s 2 v prvočíselnom rozklade, čiže každé párne, než tie s 5, čiže násobky 5. Skúsme preto nájsť najmenšie k také, že v prvočíselnom rozklade $k!$ je šesťkrát číslo 5. Pri postupnom násobení od najmenších čísel sa stále pridá nová 5 do prvočíselného rozkladu, keď narazíme na jej násobok, to jest pri 5, 10, 15, 20. Zastavíme sa pri 25. To je 5^2, čiže tu je 5 v prvočíselnom rozklade až dvakrát, dokopy v 25! je už piaty a šiesty raz. Najmenšie k vyhovujúce zadaniu je tým pádom 25.

Úloha 2.4: Máme 6 hudobníkov, pričom každý z nich vie hrať na gitaru, klavír aj saxofón. Najprv jeden z nich zahrá na niektorý z troch hudobných nástrojov. Potom druhý z nich zahrá na nejaký iný hudobný nástroj a napokon tretí z nich zahrá na zvyšný hudobný nástroj. Koľkými rôznymi spôsobmi vedia zorganizovať vystúpenie?

Výsledok: $120 \times 6 = 720$

Riešenie: Máme v poradí 3 pozície, na ktorých mohli byť daní hudobníci. Rozoberme si postupne, koľko možností na rôznych hudobníkov máme na každej z týchto pozícií. Na prvej pozícii sa môže nachádzať 6 hudobníkov, na druhej zvyšných 5 a na tretej zvyšní 4. Keďže nám záleží na poradí, máme teda $6 \times 5 \times 4 = 120$ možných poradí hudobníkov. Každý z hudobníkov vie hrať na každý z nástrojov. Prvý hudobník teda môže hrať na 3 rôzne nástroje, druhý na zvyšné 2 a poslednému ostane 1. Spolu teda máme $3 \times 2 \times 1 = 6$ možností, ako môžu byť zoradené nástroje. Keď teda skombinujeme každú možnosť poradia hudobníkov a poradia nástrojov, dostaneme $120 \times 6 = 720$ všetkých možností zorganizovania vystúpenia.

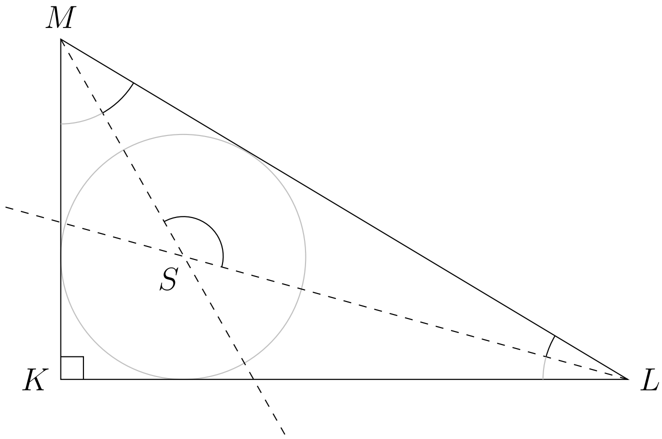
Úloha 2.5: V pravouhlom trojuholníku KLM s pravým uhlom pri vrchole K je S stred kružnice jemu vpísanej. Aká je veľkosť uhla LSM?

Výsledok: 135°

Riešenie: Keďže stred vpísanej kružnice trojuholníku leží na priesečníku osí vnútorných uhlov trojuholníka, polpriamka LS rozdelí uhol KLM na polovice a rovnako polpriamka MS rozdelí uhol LMK na polovice.

Vieme, že súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka je 180°. Keďže má uhol pri vrchole K 90°, súčet veľkostí uhlov KLM a LMK bude zvyšných 90°.

Všimnime si, že v trojuholníku LMS sú dva vnútorné uhly práve polovice postupne z uhlov KLM a LMK. To znamená, že súčet uhlov SLM a LMS bude polovicou zo súčtu veľkostí uhlov KLM a LMK, teda 45°. Keďže je súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku rovný 180°, posledný vnútorný uhol LSM musí mať veľkosť 135°.



Úloha 2.6: Koľkými spôsobmi vieme napísať čísla 1 až 6 do vrcholov pravidelného šesťuholníka tak, aby práve pre tri z týchto čísel platilo, že sú väčšie ako obaja ich susedia v šesťuholníku? Otočenia a prevrátenia šesťuholníka sa považujú za rovnaké rozloženie.

Výsledok: 8

Riešenie: Nazvime číslo väčšie od oboch svojich susedov veľké. Medzi umiestňovanými číslami nemáme dve čísla menšie ako 1 ani dve čísla menšie ako 2, takže 1 a 2 nemôžu byť veľké. Akonáhle je 3 veľké, sú jeho susedmi 1 a 2, čo už znamená, že 4 nemôže naraz susediť s dvomi z troch čísel menších ako 4, a teda nie je veľké. Takže 3 a 4 nemôžu byť veľké obe naraz. Z toho plynie, že tri veľké čísla musia byť 3, 5 a 6 alebo 4, 5 a 6.

Keďže z dvoch čísel je najviac jedno väčšie, nemôžu byť dve veľké čísla vedľa seba. Majú však byť tri zo šiestich, čiže každý druhý vrchol šesťuholníka musí mať veľké číslo. Preto polohy troch veľkých čísel si môžeme zvoliť iba jedným spôsobom, keď spôsoby líšiace sa iba otočením alebo prevrátením nepovažujeme za rôzne. V prípade, že 3 je veľké, teda vpíšeme nejako do troch navzájom nesusedných vrcholov 3, 5 a 6. Číslo 4 musí byť medzi 5 a 6, inak by susedilo s 3 a to by už nebolo veľké, možnosti sú tým pádom dve líšiace sa usporiadaním 1 a 2. V opačnom prípade (ak 3 nie je veľké) vpíšeme do troch navzájom nesusedných vrcholov 4, 5 a 6. Zvyšné čísla môžu byť usporiadané ľubovoľne, vždy budú 4, 5 i 6 veľké (ako z úvodu riešenia plynie, viac ako tri veľké nehrozia), čo nám dá pre túto vetvu toľko možností, koľkými spôsobmi môžeme napísať 1, 2 a 3 na voľné miesta, čo je $3! = 6$. Spolu je rôznych rozložení osem.

Úloha 2.7: Števo si prišiel kúpiť do obchodu 5 jabĺk a 5 broskýň. Chcel zaplatiť päťeurovou bankovkou, čo však nestačilo, teda pridal ešte ďalšiu päťeurovú bankovku a dostal nejaký výdavok späť.

Vilo si prišiel kúpiť 2 jablká a 12 broskýň a chcel zaplatiť desaťeurovou bankovkou, čo nestačilo, a keď pridal ďalšiu desaťeurovú bankovku, dostal nejaký výdavok späť. Koľko najmenej centov môže stáť 1 broskyňa?

Výsledok: 61

Riešenie: Označme j cenu jablka a b cenu broskyne. Zo zadania zostavíme dve nerovnice. Zo Števovho nákupu dostaneme:

$$5 < 5j + 5b < 5 + 5 = 10.$$

Z Vilovho nákupu dostaneme:

$$10 < 2j + 12b < 10 + 10 = 20.$$

Vydeľme prvú nerovnicu -5 a druhú 2 a dostaneme sústavu:

$$\begin{aligned} -2 < -j - b < -1, \\ 5 < j + 6b < 10. \end{aligned}$$

Sčítaním oboch nerovností dostaneme:

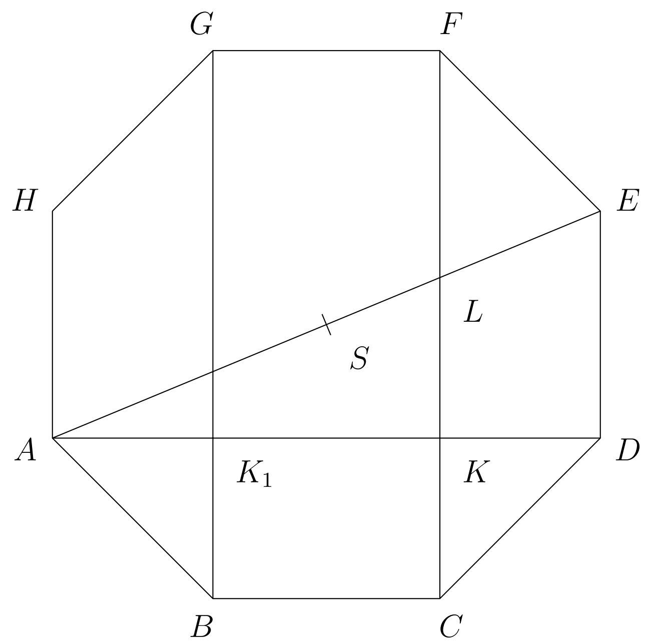
$$3 < 5b < 9,$$

z čoho vyplýva, že $b > 3/5 = 0{,}6$. Cena broskyne je teda väčšia ako 60 centov, čiže najmenej 61 centov.

Úloha 2.8: Majme pravidelný osemuholník $ABCDEFGH$ so stranou dĺžky 2. Uhlopriečka CF pretína úsečku AD v bode K a úsečku AE v bode L. Aký je obsah AKL?

Výsledok: $1 + \sqrt{2}$

Riešenie:



V riešení je zásadné, že zadaný osemuholník je pravidelný, preto začneme niekoľkými faktmi, ktoré sú „zrejmé zo symetrie pravidelného osemuholníka“:

1. V pravidelnom mnohouholníku je každá os strany osou súmernosti mnohouholníka. V našom $ABCDEFGH$ takto súmernosť podľa osi strany CD zobrazuje vrcholy A, B, C, D, E, F, G, H na F, E, D, C, B, A, H, G v tomto poradí. Uhlopriečku AD tým pádom zobrazuje na uhlopriečku CF, a teda ich priesečník K na K. K potom musí ležať na tejto osi a trojuholník CDK musí byť rovnoramenný so základňou CD.

2. Ďalej označme S stred $ABCDEFGH$ (v pravidelnom mnohouholníku má stred jednoznačný význam, ide o stred opísanej kružnice, vpísanej kružnice, stredovej súmernosti aj ďalších otočení zobrazujúcich mnohouholník naspäť na seba). S vidí každú z ôsmich strán $ABCDEFGH$ pod uhlom $360°/8 = 45°$. Otočenie o $2\cdot 45° = 90°$ potom zobrazuje každý vrchol na o dva nasledujúci, obzvlášť uhlopriečku AD zobrazí na CF. Preto tieto sú na seba kolmé a trojuholník CDK má pravý uhol pri K.
3. Keď otočíme AD a CF okolo S o pravý uhol v opačnom smere, dostaneme uhlopriečky GB a AD v tomto poradí. Označme si ich priesečník K_1. Toto otočenie zobrazuje K_1 na K, a teda $\triangle CDK$ na $\triangle ABK_1$.

Z prvých dvoch faktov je trojuholník CDK rovnoramenný pravouhlý s preponou (a základňou) CD o dĺžke podľa zadania 2. Odtiaľ už podľa Pytagorovej vety jeho odvesna musí mať dĺžku $|CK| = |DK| = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Podľa tretieho faktu je trojuholník ABK_1 zhodný s CDK, čiže tiež rovnoramenný pravouhlý s odvesnami dĺžok $|AK_1| = |BK_1| = \sqrt{2}$.

Teraz úsečky CK a BK_1 sú zhodné a obe kolmé na KK_1, takže $BCKK_1$ je obdĺžnik a $|KK_1| = |BC| = 2$. Dovedna $|AD| = |AK_1|+|K_1K|+|KD| = 2\sqrt{2}+2$. Nakoniec uhol EDK je pravý napríklad preto, že je obrazom uhla CBK_1 v otočení o pravý uhol okolo S. Odtiaľ už je DE rovnobežná s KL, vďaka čomu sú trojuholníky AKL a ADEpodobné. Ich dĺžky strán sú v pomere $|AK|/|AD|$, čo platí pre všetky dvojice odpovedajúcich si strán. Hľadaný obsah je teda:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot|AK|\cdot|KL| = \frac{1}{2}\cdot|AK|\cdot|DE|\frac{|AK|}{|AD|} &= \frac{|DE|}{2}\cdot\frac{(|AK_1|+|K_1K|)^2}{|AD|}\\ = 1\cdot\frac{(\sqrt{2}+2)^2}{2\sqrt{2}+2} &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{1}.\end{aligned}$$

Úloha 2.9: Strom, ktorý má 75 rokov, má 50% pravdepodobnosť prežiť ešte aspoň ďalších 10 rokov. Zároveň má 75-ročný strom 20% pravdepodobnosť prežiť ešte aspoň ďalších 15 rokov. Strom, ktorý má 80 rokov, má 25% pravdepodobnosť prežiť aspoň ďalších 10 rokov. Akú pravdepodobnosť má 80-ročný strom prežiť aspoň ďalších 5 rokov?

Výsledok: 5/8, respektíve $62,5\%$

Riešenie: Pre $n \leq m$, nech $P_{n,m}$ označuje pravdepodobnosť, že sa n-ročný strom dožije m rokov. Pre $n \leq k \leq m$ platí $P_{n,k} \cdot P_{k,m} = P_{n,m}$, keďže pravdepodobnosť dožiť sa z n rokov m je rovnaká, ako dožiť sa z n rokov k a následne z k rokov m. S touto novou notáciou sa nám úloha bude riešiť jednoducho.

Zo zadania vieme, že $P_{75,85} = 1/2$, $P_{75,90} = 1/5$ a $P_{80,90} = 1/4$.

Platí $P_{75,85} \cdot P_{85,90} = P_{75,90}$. Po dosadení čísel zo zadania obdržíme rovnicu $(1/2) \cdot P_{85,90} = 2/5$, z ktorej ľahko dopočítame $P_{85,90} = 2/5$. Analogicky zostavíme rovnicu $P_{80,85} \cdot P_{85,90} = P_{80,90}$, do ktorej dosadíme známe pravdepodobnosti. Získame $P_{80,85}\cdot(2/5) = 1/4$, z čoho jednoducho vyjadríme hľadaných $P_{80,85} = 5/8$, prípadne v percentách $62,5\%$.

Úloha 2.10: V lichobežníku $ABCD$ so základňami AB a CD má strana AB dĺžku 7, strana CD dĺžku 3 a strana DA dĺžku 10. Označme E stred strany BC. Potom platí, že $|AE| = 8$. Aký je obsah lichobežníka $ABCD$?

Výsledok: 48

Riešenie: Zobrazme celý lichobežník v stredovej súmernosti podľa bodu E. Všimnime si, že dĺžka úsečky DA' je súčtom dĺžok CD a AB, teda 10. Dostávame preto rovnoramenný trojuholník $AA'D$ s ramenami AD a $A'D$ o dĺžke 10 a s treťou stranou AA' s dvojnásobnou dĺžkou oproti úsečke AE, teda 16.

Trojuholník ABE má rovnaký obsah ako trojuholník $A'CE$ (to vyplýva zo stredovej súmernosti), a teda lichobežník $ABCD$ má rovnaký obsah ako trojuholník $AA'D$.

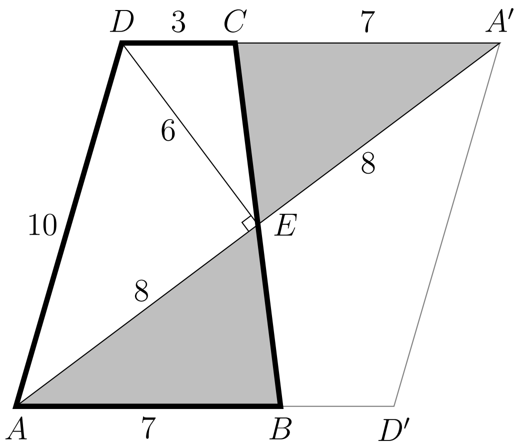
Na vypočítanie obsahu trojuholníka $AA'D$ potrebujeme poznať výšku na základňu AA'. Veďme teda kolmicu cez bod D na úsečku AA'. Z rovnoramennosti vyplýva, že úsečku AA' pretne v jej strede, a teda bode E. Keďže v trojuholníku AED poznáme dĺžky strán AE a AD a vieme, že trojuholník AED je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole E, sme schopní dorátať tretiu stranu ED cez Pytagorovu vetu:

$$\begin{aligned}
|AE|^2 + |ED|^2 &= |AD|^2 \\
|ED|^2 &= |AD|^2 - |AE|^2 \\
|ED|^2 &= 10^2 - 8^2 \\
|ED|^2 &= 100 - 64 \\
|ED|^2 &= 36 \\
|ED| &= 6
\end{aligned}$$

Obsah trojuholníka $AA'D$ už dorátame jednoducho cez základňu AA' a výšku ED na túto základňu:

$$\begin{aligned}
S_{AA'D} &= (|AA'| \cdot |ED|)/2 \\
S_{AA'D} &= (16 \cdot 6)/2 \\
S_{AA'D} &= 48
\end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že obsah lichobežníka $ABCD$ je 48.



Úloha 2.11: V kruhu máme postavené domy očíslované od 1 do 20 v smere hodinových ručičiek. Medzi domami vieme prechádzať iba podľa určitých pravidiel. Buď môžeme prejsť do susedného domu v smere hodinových ručičiek (teda z 1 do 2, z 2 do 3, ..., z 20 do 1) alebo môžeme cez stred prejsť do protiľahlého domu (teda medzi 1 a 11, 2 a 12, ..., 10 a 20). Určte počet možností, ktorými sa vieme dostať z domu číslo 10 do domu číslo 20 tak, aby sme žiaden dom nenavštívili viackrát.

Výsledok: 257

Riešenie: Jedna možnosť je prejsť priamo z domu číslo 10 do domu číslo 20. Ďalej predpokladajme, že toto nebude náš prvý prechod. Rozdeľme si domy nasledovne do desiatich párov: $P_0 = \{10, 20\}$, $P_1 = \{1, 11\}$, $P_2 = \{2, 12\}$, ..., $P_9 = \{9, 19\}$.

Platí, že každý povolený prechod je buď medzi domami v jednom páre alebo vieme prejsť z páru P_i do páru $P_{(i+1) \bmod 10}$ pre všetky $i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Takže naša cesta bude musieť vyzerať tak, že začneme v dome 10 v páre P_0, prejdeme postupne cez P_1, P_2, ..., P_9, P_0. Pritom v P_0 skončíme v dome číslo 20. Je to jediná iná možnosť, ako naša cesta môže vyzerať, okrem priameho prechodu, ktorý sme už spomínali.

V prvom kroku vieme, že z P_0 odídeme rovno do P_1. V každom z párov P_1 až P_8 si môžeme nezávisle vybrať, či spravíme prechod medzi domami v rámci páru alebo nie. V páre P_9 už na výber nemáme. Ak sme doň prišli do domu číslo 9, tak musíme spraviť prechod do 19, aby sme následne prešli do 20. Druhá možnosť by bola ísť rovno do domu číslo 10, kde sme už ale boli, takže to spraviť nemôžme. Ak sme naopak prišli do P_9 rovno z domu číslo 19, tak nesmieme urobiť prechod do domu číslo 9, pretože by sme nemali ako pokračovať, keďže v domoch číslo 10 aj 19 sme už boli. Takže správanie v páre P_9 je jasne dané predchádzajúcimi voľbami.

Takže počet možností ako prejsť z domu číslo 10 do domu číslo 20 cez postupnosť $(P_0, P_1, P_2, \ldots, P_9, P_0)$ je 2^8, keďže v každom z párov P_1 až P_8 máme 2 možnosti čo spraviť. Celkový počet možností je potom $2^8 + 1 = 257$.

Úloha 2.12: Nech a, b, c sú reálne čísla, pre ktoré platí, že polynóm

$$g(x) = x^3 + ax^2 + x + 10$$

má tri rôzne korene a každý koreň $g(x)$ je tiež koreňom polynómu

$$f(x) = x^4 + x^3 + bx^2 + 100x + c.$$

Aká je hodnota $f(1)$?

Výsledok: -7007

Riešenie: To, že polynóm $g(x)$ má tri rôzne korene r, s, t, znamená, že $g(x) = (x-r)(x-s)(x-t)$. Polynóm $f(x)$ má tiež korene r, s, t, a keďže je štvrtého stupňa, tak má ešte štvrtý koreň u a $f(x) = (x-r)(x-s)(x-t)(x-u)$. Spojením dostávame $f(x) = g(x)(x-u)$.

Pozrime sa najprv na to, čo vlastne potrebujeme zistiť. Chceme hodnotu $f(1)$, čo už vieme prepísať ako $f(1) = g(1)(1-u)$ a polynóm $g(x)$ môžeme nahradiť tvarom zo zadania. Dostávame $f(1) = g(1)(1-u) = (1^3 + a \cdot 1^2 + 1 + 10)(1-u) = (12+a)(1-u)$. Potrebujeme teda zistiť hodnotu koeficientu a a hodnotu koreňa u.

Keď sa teraz vrátime k vzťahu $f(x) = g(x)(x-u)$, tak si môžeme oba polynómy prepísať pomocou vyjadrení zo zadania:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)(x-u) \\ x^4 + x^3 + bx^2 + 100x + c &= (x^3 + ax^2 + x + 10)(x-u) \\ x^4 + x^3 + bx^2 + 100x + c &= x^4 + (a-u)x^3 + (1-au)x^2 + (10-u)x - 10u \end{aligned}$$

Následne môžeme porovnať koeficienty pri rovnakých členoch na oboch stranách rovnice. Vďaka koeficientom pri x dostávame $100 = 10 - u$, a teda koreň $u = -90$. Vďaka koeficientom pri x^3 máme $1 = a - u$, z čoho plynie $a = 1 + u = 1 - 90 = -89$.

Teraz to už môžeme iba dosadiť do upraveného tvaru vyššie a dostávame: $f(1) = (12+a)(1-u) = (12-89)(1+90) = -77 \cdot 91 = -7007$.

3. časť

Úloha 3.1: Existujú tri druhy magických bytostí. Draci majú 3 oči a 5 rohov, čerti majú 2 oči a 3 rohy a chudáci kyklopi majú 1 oko a žiadne rohy. Na lúke je niekoľko bytostí, ktoré majú spolu 25 očí. Koľko najviac môže byť na lúke rohov?

Výsledok: 41

Riešenie: Každí 2 draci a 3 čerti majú spolu 6 očí, ale 2 draci majú 10 rohov a 3 čerti majú 9 rohov. Chceme maximalizovať rohy. Ak by tam bolo 8 drakov, tak by spolu mali $3 \cdot 8 = 24$ očí a $8 \cdot 5 = 40$ rohov. Ostalo by nám jedno nevyužité oko, a ak dáme preč 1 draka, tak máme priestor na 2 čertov. Ak nahradíme 1 draka 2 čertmi, tak máme spolu $7 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 25$ očí a $7 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 41$ rohov, čo je maximum, keďže kyklopi nemajú žiadne rohy.

Úloha 3.2: V triede je 30 žiakov. Z toho 25 vie hrať futbal, 22 z nich vie hrať basketbal a 19 z nich vie hrať volejbal. Koľko žiakov vie hrať všetky tri športy, ak vieme, že každý žiak vie hrať aspoň dva športy?

Výsledok: 6

Riešenie: Ak sčítame počet žiakov na jednotlivých športoch, dostaneme $25+22+19 = 66$. V tomto počte je však každý žiak započítaný niekoľkokrát, a to toľkokrát, koľko rôznych športov vie hrať. Našou úlohou je zistiť, koľko žiakov je započítaných trikrát. Každý žiak vie hrať dva alebo tri športy. Ak by každý zo žiakov vedel hrať práve dva športy, v súčte by sme dostali $30 \times 2 = 60$. My ale máme spolu v súčte 66, čo je o 6 viac. Týchto 6 je žiakov, ktorí vedia hrať tri športy (každý okrem pôvodných 2 pridá do súčtu ešte 1).

Úloha 3.3: V trojuholníku ABC s obsahom 80 má strana AB dĺžku 20 a strana BC dĺžku 17. Označme D pätu výšky z bodu C. Aká je dĺžka úsečky AD?

Výsledok: 5

Riešenie: Keďže obsah trojuholníka ABC je 80, tak $|CD| = (80 \cdot 2)/|AB| = 160/20 = 8$. Vieme, že trojuholník DBC je pravouhlý s pravým uhlom v bode D. Z Pytagorovej vety tak dostávame $|DB|^2 = |BC|^2 - |CD|^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$. Potom $|AD| = |AB| - |DB| = 20 - \sqrt{225} = 20 - 15 = 5$.

Úloha 3.4: V zošite boli napísané 4 kladné celé čísla. Potom Michal pre každú dvojicu čísel zo zošita napísal na tabuľu ich súčin. Uvedomil si, že medzi číslami napísanými na tabuli sú iba štyri rôzne čísla. Najmenšie z nich bolo 49 a druhé najväčšie 63. Aké bolo najväčšie číslo, ktoré Michal napísal na tabuľu?

Výsledok: 72

Riešenie: Označme čísla napísané v zošite a, b, c, d a bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme $a \leq b \leq c \leq d$. Ak by všetky čísla boli rôzne, dostali by sme aspoň päť rôznych súčinov, pretože jediné dvojice s rovnakým súčinom by mohli byť $a \cdot d$ a $b \cdot c$. Na tabuli však boli iba štyri rôzne súčiny, takže niektoré dve čísla museli byť rovnaké. Aby boli rôzne súčiny štyri, musela existovať práve jedna dvojica rovnakých čísel a ostatné čísla museli byť navzájom rôzne.

Najmenší súčin bude $a \cdot b = 49$, teda buď $a = 1$ a $b = 49$, alebo $a = 7$ a $b = 7$. Ak by a bolo 1 a b bolo 49, potom by jedno z čísel c a d muselo byť 63, aby sme dostali súčin 63. Druhé z nich potom bude buď 49, alebo 63, avšak ani jedna z možností 1, 49, 49, 63 a 1, 49, 63, 63 nevyhovuje, pretože v oboch je 63 až tretí najväčší súčin.

Takže vieme, že $a = 7$ a $b = 7$ a c a d sú navzájom rôzne a aj rôzne od 7. Z toho vyplýva, že c je aspoň 8 a d je aspoň 9. Ak by d bolo viac ako 9, potom by $a \cdot d$ a $c \cdot d$ boli rôzne a väčšie ako 63, takže by 63 nemohlo byť druhé najväčšie číslo na tabuli.

Ostala nám jediná možnosť, a to že d je 9 a tým pádom c je 8. Na tabuli teda boli napísané čísla 49, 56, 63 a 72, najväčšie z nich je 72.

Úloha 3.5: Nech n je celé číslo väčšie ako 1. Autobus vyrazil z garáže už s niekoľkými cestujúcimi. Na každej ďalšej zastávke vystúpil jeden cestujúci a n cestujúcich nastúpilo. Po piatich zastávkach bolo v autobuse n-krát viac cestujúcich ako na začiatku pred prvou zastávkou. Koľko cestujúcich bolo v autobuse na začiatku?

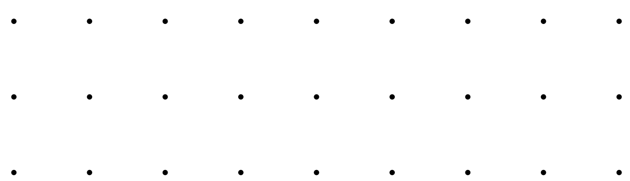
Výsledok: 5

Riešenie: Nech je na začiatku v autobuse x ľudí. Keďže na každej zastávke nastúpilo n ľudí a vystúpil jeden, tak sa počet ľudí v autobuse zmení o $n-1$ po každej zastávke. Po prvej zastávke teda bude v autobuse $x+(n-1)$ ľudí, po druhej $x+2(n-1)$, ... a po piatej $x+5(n-1)$. Taktiež vieme, že na konci bolo v autobuse $x \cdot n$ ľudí. Zostavme z týchto údajov rovnicu.

$$\begin{aligned} x+5(n-1) &= xn \\ x+5n-5 &= xn \\ x-xn+5n-5 &= 0 \\ -x(n-1)+5(n-1) &= 0 \\ (n-1)(5-x) &= 0 \end{aligned}$$

Ľavú stranu rovnicu sme upravili do súčinového tvaru a na to, aby sa rovnala nule, sa musí aspoň jedna zo zátvoriek rovnať nule. Vieme, že to nemôže byť prvá zátvorka, keďže podmienkou v zadaní je, že $n > 1$. Musí to teda byť tá druhá. Z tohto tvaru vyplýva, že v autobuse muselo byť na začiatku 5 ľudí.

Úloha 3.6: Koľko priamok prechádza aspoň 3 bodmi mriežky 3×9 bodov?



Výsledok: 44

Riešenie: Ako prvé si môžeme všimnúť 12 priamok (3 riadky, 9 stĺpcov). Ďalej si všimnime, že každá zo zvyšných hľadaných priamok musí byť uhlopriečkou obdĺžnika, ktorého vrcholy a priesečník uhlopriečok ležia v mriežke. Z vlastností obdĺžnika vieme, že priesečník uhlopriečok v obdĺžniku je zároveň jeho stredom súmernosti. Z toho vyplýva, že aj osi strán sa musia v tomto bode pretnúť, a teda aj stredy strán musia byť bodom mriežky. To platí, iba ak sú dĺžky strán párne (počty bodov na jednotlivých stranách nepárne), kde presne jeden bod pripadne na stred strany. Zároveň uhlopriečky každého obdĺžnika so stranami párnej dĺžky vždy určujú priamky vyhovujúce zadaniu. Navyše, keďže je naša mriežka rozmeru 3×9, ľahko si rozmyslíme, že uhlopriečky dvoch rôznych obdĺžnikov vždy určia rozličné priamky.

V mriežke sa nachádza sedem obdĺžnikov 3×3 body, päť obdĺžnikov 5×3 body, tri obdĺžniky 7×3 body a jeden obdĺžnik 9×3 body. V každom takomto obdĺžniku vieme nájsť dve uhlopriečky, čo nám dokopy dá $2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 32$ priamok. V mriežke možno v súčte nájsť $32 + 12 = 44$ priamok, ktoré prechádzajú aspoň troma bodmi.

Úloha 3.7: Majme rovnobežník $ABCD$. Na polpriamke BC mimo úsečky BC leží bod E tak, že platí $|BC| : |CE| = 2$. Na polpriamke AB mimo úsečky AB leží bod F tak, že platí $|AB| : |BF| = 3$. Aký je obsah rovnobežníka $ABCD$, ak vieme, že $S_{ABCD} - 10 = S_{DEF}$?

Výsledok: 60

Riešenie: Najprv si určíme, že dĺžka strany $AB = a$, dĺžka strany $BC = b$ a výška na stranu AB je v_a. Potom si postupne vypočítame obsahy trojuholníkov BFE, BFX, DXC a DCE, kde X je priesečník úsečky BC s úsečkou DF. Po sčítaní obsahov trojuholníkov BFE, DXC a DCE a odčítaní obsahu trojuholníka BFX dostaneme obsah trojuholníka DEF. Keďže trojuholníky AFD a BFX sú podobné podľa vety uu (AD je rovnobežné s BE), tak z tohto si vieme vypočítať dĺžku úsečiek BX a XC. Keďže strana AF je zo zadania štyrikrát väčšia ako strana BF, tak aj AD musí byť štyrikrát väčšie ako BX, z čoho vyplýva, že $|BX| = b/4$ a $|XC| = |BX| - |BX| = 3b/4$. Teraz vieme, že obsah trojuholníka BFE je

$$\frac{\frac{3}{2} \cdot v_a \cdot |BF|}{2}.$$

Dĺžku výšky vieme podľa toho, že trojuholníky BEY, kde Y je priesečník výšky a strany BF, a BCZ, kde Z je priesečník výšky rovnobežníka s jeho stranou CD, sú podobné podľa vety uu, a keďže strana BE je o polovicu dlhšia ako BC, tak aj v takom pomere sú dané výšky. Rovnako tieto podobnosti a výpočty platia aj pre ostatné trojuholníky. Tieto všetky výpočty si dosadíme do rovnice v zadaní a dopočítame S_{ABCD}:

$$\begin{aligned}
S_{ABCD} - 10 &= S_{DEF} \\
a \cdot v_a - 10 &= S_{BFE} - S_{BFX} + S_{DXC} + S_{DCE} \\
a \cdot v_a - 10 &= \frac{\frac{3}{2} \cdot v_a \cdot \frac{1}{3} \cdot a}{2} - \frac{\frac{1}{4} \cdot v_a \cdot \frac{1}{3} \cdot a}{2} + \frac{\frac{3}{4} \cdot v_a \cdot a}{2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot v_a \cdot a}{2} \\
a \cdot v_a - 10 &= a_v \cdot a \cdot \left(\frac{3}{12} - \frac{1}{24} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right) \\
a \cdot v_a - 10 &= a_v \cdot a \cdot \left(\frac{6}{24} - \frac{1}{24} + \frac{9}{24} + \frac{6}{24}\right) \\
a \cdot v_a - v_a \cdot a \cdot \frac{20}{24} &= 10 \\
v_a \cdot a \cdot \frac{1}{6} &= 10 \\
a \cdot v_a &= 60 \\
S_{ABCD} &= 60
\end{aligned}$$

Úloha 3.8: Nech x, y sú reálne čísla, pre ktoré platí

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

Určte hodnotu výrazu

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2.$$

Výsledok: 5

Riešenie: Upravíme prvú rovnicu zo zadania:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+y} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\
1 &= \frac{x+y}{x} - \frac{x+y}{y} \\
1 &= \left(1 + \frac{y}{x}\right) - \left(\frac{x}{y} + 1\right) \\
1 &= \frac{y}{x} - \frac{x}{y} \\
1 &= \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 \\
1 &= \frac{y^2}{x^2} - 2 \cdot \frac{xy}{yx} + \frac{x^2}{y^2} \\
1 &= \frac{y^2}{x^2} - 2 + \frac{x^2}{y^2} \\
3 &= \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2}
\end{aligned}$$

Potom roznásobime hľadaný výraz a dostaneme výsledok:

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2} + 2 \cdot \frac{xy}{yx} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2}{x^2} + 2 + \frac{x^2}{y^2} = 3 + 2 = 5$$

Úloha 3.9: Nech $ABCD$ je štvorec a X je bod na strane DA taký, že kružnica s priemerom CX sa dotýka strany AB. Ak $|AX| = 1$, tak aká dlhá je strana štvorca $ABCD$?

Výsledok: 4

Riešenie: Označme si stranu štvorca a, priemer kružnice $|CX| = 2r$ a jej stred S.

Napíšme si Pytagorovu vetu pre trojuholník CDX.

$$\begin{aligned}
(2r)^2 &= (a-1)^2 + a^2 \\
4r^2 &= 2a^2 - 2a + 1
\end{aligned}$$

Označme priesečník rovnobežky so stranou AB vedenou bodom S a strany CB ako Q. Ďalej označme pätu kolmice z S na AB ako P. $|SC| = r$, pretože SC je polomer. Keďže SP je kolmá na AB a vychádza zo stredu S a zároveň kružnica sa dotýka AB, tak P musí byť práve bod dotyku (pretože polomer je kolmý na dotyčnicu). SP je teda polomer kružnice a $|SP| = r$. $PBQS$ je obdĺžnik, a teda BQ je taktiež r. Potom $|CQ| = a - r$. Keďže S je v strede CX, bude aj päta kolmice P v strede AB. $|BP| = |SQ| = \frac{a}{2}$. Napíšme si teraz Pytagorovu vetu pre trojuholník SQC.

$$\begin{aligned}
r^2 &= (a-r)^2 + \frac{a^2}{4} \\
r^2 &= \frac{5}{4}a^2 + r^2 - 2ar \\
0 &= \frac{5}{4}a^2 - 2ar
\end{aligned}$$

Keďže a je dĺžka strany štvorca, nie je nulová a môžeme vydeliť obe strany rovnice a.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{5}{4}a - 2r \\
2r &= \frac{5}{4}a
\end{aligned}$$

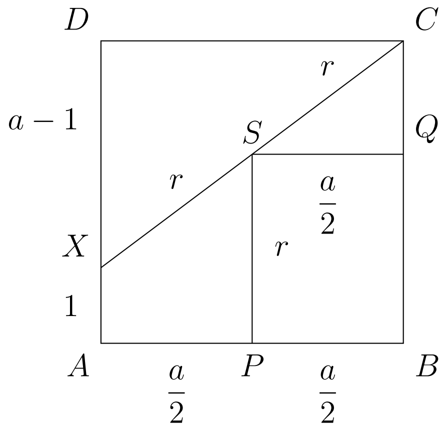
Dosaďme teraz do Pytagorovej vety z trojuholníka CDX.

$$\begin{aligned}
\frac{25}{16}a^2 &= 2a^2 - 2a + 1 \\
\frac{25}{16}a^2 &= 2a^2 - 2a + 1 \\
0 &= \frac{7}{16}a^2 - 2a + 1
\end{aligned}$$

Ostáva už len zistiť korene rovnice pomocou vzorca.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot \frac{7}{16}}}{2 \cdot \frac{7}{16}} = \frac{2 \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{\frac{7}{8}} = \frac{4(4 \pm 3)}{7}$$

Korene sú teda 4/7 a 4. Vyhovuje ale iba druhý koreň, keďže $a \geq 1$.



Úloha 3.10: Majme rastúcu postupnosť všetkých kladných celých čísel, ktoré sú súčtom niekoľkých (aspoň jednej) rôznych mocnín trojky. Postupnosť začína číslom $3^0 = 1$. Aký je stý člen tejto postupnosti?

Výsledok: 981

Riešenie: Je kľúčové uvedomiť si, že $3^k > 3^{k-1} + 3^{k-2} + \cdots + 3^1 + 3^0$ pre všetky $k \geq 1$. A teda postupnosť bude vyzerať nasledovne:

$$\begin{array}{llllr}
 & & & 3^0 & = 1 \\
 & & 3^1 & & = 3 \\
 & & 3^1 & + 3^0 & = 4 \\
 & 3^2 & & & = 9 \\
 & 3^2 & & + 3^0 & = 10 \\
 & 3^2 & + 3^1 & & = 12 \\
 & 3^2 & + 3^1 & + 3^0 & = 13 \\
3^3 & & & & = 27 \\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

Ľubovoľný súčet rôznych mocnín trojky si teda vieme predstaviť aj ako binárne číslo, kde 1 na mieste 2^k znamená, že 3^k sa v súčte nachádza a 0 na mieste 2^k znamená, že 3^k sa v súčte nenachádza. Teda napríklad číslo $12 = 3^2 + 3^1$ vieme zapísať ako 110_2 $(1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0)$. A keďže $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 = 6$, tak číslo 12 bude šieste číslo v postupnosti zo zadania.

Aby sme zistili, ktoré číslo bude sté, ostáva už iba zistiť, ako zapíšeme číslo sto v binárnej sústave:

$$100_{10} = 64 + 32 + 4 = 2^6 + 2^5 + 2^2 = 1100100_2$$

A teda stý člen postupnosti zo zadania bude $3^6 + 3^5 + 3^2 = 729 + 243 + 9 = 981$.

Úloha 3.11: Do miestnosti vojde 10 osôb. Každá z nich sa vyzuje a položí svoj pár topánok do skrinky. Potom príde škriatok, topánky zamieša a náhodne spáruje tak, že v každom páre bude jedna ľavá a jedna pravá topánka. Topánky v pomiešaných pároch môžu, ale nemusia patriť tej istej osobe. Aká je pravdepodobnosť, že pre žiadne $k < 5$ neexistuje k vytvorených párov tvorených topánkami patriacimi práve k osobám?

Výsledok: $(9! + \binom{10}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4! \cdot 4!)/10! = 3/25$

Riešenie: Náhodné spárovanie topánok si môžeme predstaviť tak, že pravé topánky položíme do radu a potom ku každej pravej topánke položíme jednu náhodnú ľavú topánku. Z toho vieme, že počet všetkých možných spárovaní je 10!, pretože k prvej pravej topánke máme na výber 10 ľavých topánok, z ktorých jednu vyberieme, k druhej pravej topánke už vyberáme len z 9 ľavých topánok, a tak ďalej. Týmto spôsobom dostaneme každé možné spárovanie práve raz.

Nazvime *uzavretou skupinou* skupinu k párov, v ktorej sú topánky patriace práve k osobám (pre každú osobu tam musí teda byť jej pravá aj ľavá topánka). Nazvime *rozdelenie do najmenších uzavretých skupín* také rozdelenie párov do skupín, v ktorom každá skupina je uzavretá skupina a žiadna uzavretá skupina sa už nedá rozdeliť na dve menšie uzavreté skupiny. Keď máme nejaké konkrétne spárovanie, môžeme ho rozdeliť do najmenších uzavretých skupín takto: Do novej skupiny pridáme jeden zatiaľ nevybratý pár. Ak topánky v tomto páre patria tej istej osobe, tak tento pár tvorí uzavretú skupinu sám o sebe. Ak topánky v tomto páre patria dvom rôznym osobám, tak do tejto skupiny pridáme druhý pár, ktorého ľavá topánka patrí tej istej osobe ako pravá topánka prvého páru. Teraz si môžeme uvedomiť, že buď zvyšné dve topánky (pravá z druhého páru a ľavá z prvého páru) patria tej istej osobe a v tom prípade sme vytvorili uzavretú skupinu z 2 párov, alebo patria rôznym osobám a v tom prípade vieme pridať tretí pár, ktorý obsahuje ľavú topánku patriacu rovnakej osobe ako pravá topánka druhého páru. Rozmyslite si, že týmto spôsobom vieme rozdeliť páry do najmenších uzavretých skupín.

Podmienka, že pre žiadne $k < 5$ neexistuje k vytvorených párov tvorených topánkami patriacimi práve k osobám, hovorí, že neexistuje uzavretá skupina tvorená 4 alebo menej pármi. Preto rozdelenie do najmenších uzavretých skupín nám rozdelí páry do dvoch skupín po 5 párov alebo do jednej skupiny so všetkými 10 pármi.

Ak máme len jednu uzavretú skupinu, tak to znamená, že páry vieme postaviť do kruhu tak, že pravá topánka jedného páru a ľavá topánka páru hneď napravo patria tej istej osobe. Inými slovami počet takýchto párovaní je rovnaký ako počet možností, ako vieme postaviť 10 ľudí do kruhu (pravú topánku potom necháme na mieste človeka a ľavú na mieste o 1 doprava), pričom otočenia kruhu sú tá istá možnosť. Počet týchto možností je 9!, pretože jedného človeka postavíme do kruhu a potom vždy vyberáme, koho postavíme napravo zo zatiaľ nevybraných ľudí.

Ak sú páry rozdelené do dvoch uzavretých skupín po 5 párov, tak musíme najprv určiť rozdelenie párov do týchto 2 skupiny, následne počet možností pre každú skupinu sa zráta rovnako ako v prípade vyššie. Počet možností na rozdelenie 10 ľudí do 2 skupín je $\binom{10}{5} \cdot \frac{1}{2}$, pretože máme $\binom{10}{5}$ možností, ako vybrať 5 ľudí do prvej skupiny (zvyšní budú tvoriť druhú skupinu), musíme to však ešte vydeliť dvoma, pretože každé rozdelenie sme zarátali dvakrát – raz, keď sme daných 5 ľudí vybrali do prvej skupiny, a raz, keď nám tých istých 5 ľudí zostalo v druhej skupine. Pre každú skupinu 5 párov topánok potom máme 4! možností na spárovanie tak, aby tvorili najmenšiu uzavretú skupinu o veľkosti 5. Spárovania v 2 skupinách sú nezávislé, preto dokopy je takýchto možností $\binom{10}{5}/2 \cdot 4! \cdot 4!$.

Na určenie výslednej pravdepodobnosti nám už iba stačí sčítať počet vyhovujúcich spárovaní z oboch možností dokopy a vydeliť to počtom všetkých možných spárovaní: $(9! + \binom{10}{5}/2 \cdot 4! \cdot 4!)/10! = 3/25$.

Úloha 3.12: Nájdite najmenšie kladné celé číslo n také, že každý z intervalov $\langle n^2, (n+1)^2)$, $\langle (n+1)^2, (n+2)^2)$, ..., $\langle (n+100)^2, (n+101)^2)$ obsahuje násobok 1001.

Výsledok: 485

Riešenie: Majme interval $\langle k^2, (k+1)^2)$. Počet jeho prvkov je rovný $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$. Môžme vidieť, že počet prvkov v intervaloch sa postupne zväčšuje. Pre $k = 500$ už bude počet prvkov rovný 1001, čo znamená, že interval $\langle 500^2, 501^2)$ a každý ďalší už určite musí obsahovať aspoň jeden násobok 1001.

Uvedomme si, že aj niekoľko intervalov pred $\langle 500^2, 501^2)$ môže ešte obsahovať požadované násobky, aj keď majú menší počet prvkov ako 1001. Chceli by sme nájsť najbližší taký, čo násobok 1001 neobsahuje.

Prvým prvkom intervalu $\langle 500^2, 501^2)$ je $500^2 = 250\ 000$. Najbližší väčší násobok 1001 je 250 250. Z toho vieme usúdiť, že 500^2 má potom zvyšok 751 po delení 1001.

Začiatok predošlého intervalu, $\langle 499^2, 500^2)$, je o 999 menší. Musí mať teda zvyšok 753 po delení 1001. Keďže sa jedná o vyšší zvyšok ako 751 a zvyšky v intervaloch postupne rastú, musí aj interval $\langle 499^2, 500^2)$ obsahovať násobok 1001. Rovnakou úvahou zistíme, že začiatok intervalu $\langle 498^2, 499^2)$ má zvyšok 757, začiatok $\langle 497^2, 498^2)$ má zvyšok 763 a tak ďalej.

Hľadáme teda taký interval, kde zvyšok prvého prvku „presiahne“ 1001. Zovšeobecnením myšlienky z predošlého odseku zistíme, že zvyšok prvého prvku intervalu $\langle (500-l)^2, (501-l)^2)$ je rovný $751 + \sum_{i=1}^{l} 2i = 751 + l \cdot (l+1)$. Hľadáme teda najmenšie l také, pre ktoré platí $l \cdot (l+1) \geq 250$. Hľadaným l je číslo 16.

Interval $\langle 484^2, 485^2)$ je teda najbližším intervalom k $\langle 500^2, 501^2)$, ktorý násobok 1001 neobsahuje. Všetky intervaly $\langle 485^2, 486^2)$ a vyššie už násobky 1001 obsahujú, takže hľadaným n je 485.

autori:	Viktória Brezinová, Viliam Geffert, Jakub Genči, Matej Hanus, Miriam Horváthová, Martin Kopčány, Peter Kovács, Martin Masrna, Michal Masrna, Martin Mihálik, Lujza Milotová, Kristína Mišlanová, Benjamín Mravec, Erik Novák, Patrik Paľovčík, Ján Richnavský, Žaneta Semanišinová, Štefan Vašak
recenzia a úprava:	Matej Hanus, Miriam Horváthová, Lujza Milotová, Patrik Paľovčík
názov:	**Košický Matboj – 27. 10. 2023**
vydavatelia:	Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach Združenie STROM
web:	`seminar.strom.sk/matboj`